



Kraftarten und Bewegungsformen

Die äußeren Bewegungen

mit einführender Aufgaben-Sammlung

Von

Dr.-Ing. E. h. Max Möller

ord. Professor an der Technischen Hochschule zu Braunschweig
Geh. Hofrat

Mit 72 Abbildungen



Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges.
Braunschweig 1922

Seinem hochverehrten

ehemaligen Lehrer der Mathematik

am Real-Gymnasium zu Flensburg und nachmaligem Freunde

Herrn Professor Conrad Metger

zum 80. Geburtstage gewidmet

von

Max Möller.

Vorwort.

Anleitung zur Aufstellung von Rechnungsansätzen für die mathematisch-physikalische Behandlung von Bewegungsvorgängen bietet diese Schrift; sie leitet, mit den einfachen Beziehungen beginnend, zur Betrachtung schwieriger Probleme über. Dabei dienen ausgerechnete Zahlenbeispiele zur Belebung der Anschauung. Der Stoff ist nach den geometrischen oder räumlichen Formen der Bewegung geordnet; vergleiche dazu eine meiner älteren Abhandlungen*).

Besonderer Wert ist auf die Beachtung des Gesetzes über die Erhaltung der Bewegungsgröße (Summe aus Masse mal Geschwindigkeit) gelegt und auf die Beantwortung der Frage, wann und zu welchem Betrage Energie übertragen oder wann diese stationär wird, so daß hinfort für den Energieträger Isolierung eintritt.

Wenn auch die sinnfällige Wahrnehmung im Verein mit deren kunstvoll entwickelter Form experimenteller Forschung das Fundament unseres Wissens legt, indem sie den Baustoff für die Welt unserer Vorstellungen liefert, so mag der Wert einer theoretischen Bearbeitung des Wissensstoffes, im Dienst zu erstrebender, weitgehender Anwendung und vielseitiger Auswertung gewonnener Erfahrungen erforderlich, doch nicht zu gering veranschlagt werden.

Das Studium der Bewegungslehre schafft insbesondere Verbindungswege, welche quer zu den Straßen beruflich getrennter Arbeitsrichtungen verlaufen; es führt dahin, in dem zunächst scheinbar Fremdartigen Verwandtes zu entdecken. Das entspricht dem Wunsche der Gegenwart nach Gewinnung einigenden Wissens und nach Übersicht wie Verständnis der Zusammenhänge.

Braunschweig, im März 1922.

Max Möller.

---

*) Ein Beitrag zur Systematik der Kräfte. Von Professor M. Möller, Braunschweig. Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes, Berlin, Jahrg. 1896, S. 117 bis 156. — Verlag Leonh. Simion Nf., Berlin W 57, Bülowstr. 56.

From the Estate of
Prof. Zuiret
5-15-30

Inhaltsverzeichnis.

VII. Beziehung zwischen Druckhöhe und Geschwindigkeit bei unveränderlicher Beschleunigung oder Verzögerung.

VIII. Beziehungen zwischen Druckhöhen und Geschwindigkeiten bei veränderlicher Beschleunigung oder Verzögerung.

IX. Einige noch geplante Veröffentlichungen und Untersuchungen.

Einleitung.

Praktische Anschauung über die Abhängigkeit der Kraftarten von den wichtigsten Bewegungsformen der Masse zu erwecken, bildet das Hauptbemühen dieser Schrift. Während das Experiment von den sinnfällig wahrnehmbaren Wirkungen der Kräfte ausgeht, so deren Gesetze erforschend, wird hier der entgegengesetzte Weg eingeschlagen. Die Bewegungsform ist nun das Angenommene, das für die Betrachtung Gegebene, und es gilt durch Schlußfolgerung die Gesetze ihrer Wirkungen abzuleiten. Diese zwiefache Behandlung, von den entgegengesetzten Polen unseres Wahrnehmungsvermögens einmal sinnfälliger und andererseits innerlich geistiger Art ausgehend und einander ergänzend, führt dort, wo beide zu einer Übereinstimmung ihrer Ergebnisse kommen, zu erweitertem Verständnis des Wesens der Naturvorgänge.

So zeigte sich z. B., daß die Wirkung radialer Schwingungen, von der Oberfläche eines Aussenders auf die Masse des umgebenden Raumes übertragen, in einer sehr wichtigen Beziehung mit der Wirkung oder Eigenschaft der von einem Konduktor ausgehenden Elektrizität übereinstimmt. Beidemal ist der Übertritt von Energie nur von kurzer Dauer; alsbald tritt Sättigung des umgebenden Mittels mit Energie jener Art ein. Von diesem Zeitpunkt ab nimmt die Energie eine statische Form an; sie hört auf zu strömen. Eine solche Erkenntnis, die meines Wissens noch nicht ausgewertet ist, bietet Anregung zu neuartigen Forschungen sowohl experimenteller wie theoretischer Art. Siehe dazu Abschnitt 9, S. 11, und später Lieferung 2.

Durch die Art seiner beruflichen Ausbildung wird der Bauingenieur besonders dazu angeregt, eine Auswertung der Theorie, und zwar der Kräftelehre zu erstreben, denn es sind z. B. die Erfolge im Brückenbau nicht durch Ausübung des Mittels praktischer Untersuchung herbeigeführt, sondern es sind die Tragsysteme, gestützt auf die Anwendung der rechnenden Kunst, ersonnen. Zur Zeit meines Studiums ging man darin insofern zu weit, als da,

wo die Rechnung versagte und die experimentelle, die praktische Forschung hätte einsetzen müssen, das meist unterblieb, indem man sich in bezug auf Materialfestigkeit und Ähnliches allzu bereitwillig auf ganz gelegentlich gewonnene, nur ungenaue Erfahrungswerte und die Ergebnisse unsicherer Schätzung stützte. Das ist zum Teil auch heute noch der Fall, weil die Gewinnung von Festwerten zumal im Bauingenieurfach meist mit großen Umständen und Kosten verbunden ist. Meine Bemühungen waren allzeit darauf gerichtet, beide Mittel der Forschung oder Untersuchung praktischer wie theoretischer Art zu vereinigen.

Meine erste Arbeit über Bewegungsvorgänge betraf die vom Winde erzeugte Wasserwelle; sie entstand in den Sommerferien nach meinem dritten Studienjahr bei Wiederholung der Lehrgebiete der höheren Mathematik und der angewandten Mathematik (Mechanik wie Dynamik). Angeregt durch die Betrachtung der Wellen, vom Segelboot aus in Stunden der Erholung erfolgend, verfaßte ich dieselbe im Jahre 1877. Davon ist nur ein Teil später veröffentlicht[1]). Dann folgten von 1880 an Abhandlungen über die Bewegung der atmosphärischen Luft, über gleichförmig fließende Bewegung des Wassers, die ungleichförmige Bewegung desselben und die Wellen, insbesondere diejenigen der Ebbe und Flut, wie über deren Umgestaltung bei ihrem Eintritt in Flußmündungen; siehe hier die Fußnote Abschnitt IV, 16, S. 63.

Nun hat durch die Schaffung von Wasserbau-, insbesondere von Flußbaulaboratorien die praktische Forschung in bezug auf die Wasserbewegung in ihren Beziehungen zur Technik eine erfreuliche Neubelebung seit mehr als einem Jahrzehnt erfahren, worin zumal der Geheime Rat Dr.-Ing. E. h. H. Engels, Professor für Wasserbau an der Technischen Hochschule in Dresden, führend geworden ist. Dabei ist aber der Umstand hervorgetreten, daß vereinzelt den Ergebnissen angestellter Messungen etwas vorschnell eine zu weitgehende wissenschaftliche Bedeutung dort beigemessen wurde, wo jene nicht ganz im Einklang mit anerkannten Gesetzen der theoretischen Physik gestanden haben. In diesen Fällen lagen aber nur Mängel der Versuchsanordnung vor, deren Beseitigung nach und nach glücken wird. Das kann aber nur geschehen, wenn wir uns nebenher mit der Theorie der Erscheinungen, hier

[1]) Exners Repertorium der Physik, Bd. XX, Wien.

der Bewegungsvorgänge und der Kraftwirkungen, in eingehender Weise beschäftigen. Das gab mir Veranlassung, mich neuerdings wieder dem Studium der Bewegungsvorgänge und der Kräfte zuzuwenden. So sind zwei Schriften entstanden, die eine, hier vorliegende, von wissenschaftlich allgemeinerer Art, welche unter weiterem Gesichtswinkel eine Übersicht und in dem Rahmen meiner Erfahrung die Anwendung der wichtigsten Gesetze aus dem weiten Bereich der Bewegungsvorgänge bietet, und eine zweite Schrift über die fließende Bewegung des Wassers, welche die Grenzen meines beruflichen Arbeitsgebietes innehält, und deren Veröffentlichung später erstrebt werden wird.

Das Studium der Bewegungsvorgänge hat sich nicht auf beruflich abgegrenzte Gebiete zu erstrecken; es entnimmt seinen Stoff mancherlei Wissenschaften und Fachrichtungen, insbesondere der Physik mit ihren vielgestaltigen Zweiggebieten und der Technik. Mir boten die theoretische Meteorologie und der Wasserbau, mein engeres Lehrgebiet, mancherlei Anregungen.

Die berufliche Arbeitsteilung errichtet aber zwischen den einzelnen Auswertungsgebieten der Bewegungslehre vielfache trennende Schranken; sie erwachsen ganz ungewollt naturgemäß von selbst, denn es kann die erfolgreiche Bearbeitung des beruflichen Sondergebietes nur bei nicht zu großem Umfang desselben von seiten der einzelnen Person erreicht werden. Darum sind dann daneben zusammenfassende Studien, welche verknüpfend wirken, von Nutzen. Diese sind hier, unter Fortlassung der Vielheit des einzelnen, erstrebt. So mag denn diese Schrift für eingehendere berufliche Studien sowohl technischer wie auch physikalischer Art von vorbereitendem Wert sein.

I. Hauptsätze der Kräfte- und Bewegungslehre.

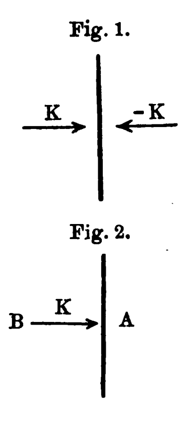
Einige allgemein gültige Gesetze der theoretischen Physik seien hier zunächst besprochen, die bei Behandlung von Aufgaben aus dem Gebiet der Bewegungslehre in erster Linie zu beachten sind. Auch sei dabei auf einige wichtige Hilfsbegriffe hingewiesen. Auf das Dargelegte wird hernach näher eingegangen. Wenn dabei vereinzelt eine Wiederholung notwendig wird, geschieht es zur Erleichterung des Verständnisses.

1. Aktion und Reaktion.

Legt man durch den Raum irgendwo einen Schnitt, und wirkt von einer Seite normal zu diesem als Aktion eine Kraft K, dann besteht auf der anderen Seite zugleich als Reaktion eine Normalkraft $K_1 = -K$ (siehe Fig. 1).

Satz 1: Aktion und Reaktion sind einander an Größe gleich, aber zueinander entgegensetzt gerichtet; sie bilden zusammen eine Spannkraft.

Will man nur das Körpergebilde A auf der einen Seite einer Schnittfläche einer Betrachtung unterziehen, dann sagt man, es wirke auf dieses Gebilde (dieses System, diesen Körper) eine äußere Kraft K (siehe Fig. 2); man spricht dabei nur von dieser einen Kraft, ohne besonders zu erwähnen, daß am Orte ihres Auftretens zugleich vom Körper A aus auch die Reaktion $-K$ ausgeht und auf das körperliche Gebilde B jenseits jener Fläche wirkt. Eine einzelne Kraft gibt es aber in Wirklichkeit nicht, sondern nur die Doppelkräfte K und $-K$, welche man zusammen die Spannung nennt. Wenn Kraft K für das körperliche System A als Aktion auftritt, von B ausgehend, dann ist sie für das System A als äußere Kraft anzusprechen, während $-K$, von A ausgehend, hingegen für das System B eine äußere Kraft bildet.



Um zwecks Ermittlung der Stabspannungen eines Tragsystems (eines Brückenträgers) anzudeuten, welche Kräfte als äußere Kräfte in Rechnung gestellt werden sollen, legt der Statiker rings um den zu berechnenden Trägerteil A (Fig. 3) den Schnitt $S - S$, jenen nach außen hin begrenzend. Am Orte der geschnittenen Stäbe, sowie am Auflager, wo der Träger gestützt ist, werden diejenigen Kräfte durch Pfeile angedeutet, welche von den abgetrennten Gebilden B und B_1 auf das Trägerstück A wirken. Bei Druck werden die Pfeile auf A zugekehrt, am Brückenauflager also von unten nach oben, bei Zug von A fortgerichtet, bei Schub, parallel zur Scherfläche gezeichnet, eingetragen. Da hinzu treten als äußere Kräfte noch die Lasten Q. Diese, die äußeren Kräfte K, B und Q, so ist die Forderung,

haben sich im Gleichgewicht zu halten, wenn das Bauwerk ruhen und standfest sein soll. Die inneren Systemspannungen, d. h. diejenigen der nicht geschnittenen Stäbe, kommen für die Berechnung nicht in Frage, da sie, paarweise als K und $-K$ auftretend, sich gegenseitig aufheben. Befinden sich die äußeren an A angreifenden Kräfte im Gleichgewicht, dann erleidet dieses Gebilde keine Änderung seines Bewegungszustandes; befindet es sich in bezug auf irgend ein Achsenkreuz in Ruhe, dann bleibt es in Ruhe, befindet es sich jedoch in Bewegung, dann behält es diese bei; man sagt dann, es liegt gleichförmige Bewegung vor. Wir haben z. B. gleichförmig fließende Wasserbewegung, wenn die in Richtung der Bewegung auftretenden äußeren Kräfte einander das Gleichgewicht halten, d. h. wenn die das Wasser stromab treibende Komponente der Schwere durch die Reibungswiderstände am benetzten Umfang aufgehoben wird.

Fig. 3.

Wiewohl diese Beziehung für die Kräfte wie die Bewegungslehre von grundlegender Bedeutung ist, finden sich in der Literatur dennoch nicht selten Verstöße gegen sie vor. Ein Fall ist mir bekannt, daß ein Vertreter der Empirie, auf viele Versuche gestützt, geglaubt hat, die Ungültigkeit dieser einfachen Bedingung für gleichförmige Wasserbewegung bewiesen zu haben; sein Irrtum hat darin gelegen, daß er überhaupt nicht mit gleichförmiger Bewegung experimentiert hatte, aber so rechnete, als läge diese vor. Darüber später Näheres. Auch in den Arbeiten von Engels[1]) ist aus jenem Grunde der Ausdruck W_i (innerer Widerstand fließender Bewegung des Wassers) bei Behandlung der fließenden Bewegung des Wassers aus der Gleichung fortzulassen, welche die Beziehung zwischen der treibenden und der widerstehenden Kraft bietet.

Die äußeren Kräfte zerfallen in solche, welche an einem Teil des Körpers, z. B. seinem Stützpunkt, angreifen, und andere, wie

[1]) Engels schreibt $\gamma t J = K + W_i$, darin bedeuten $\gamma t J$ die treibende Kraft (Seitenkraft der Schwere), K den äußeren Widerstand (Reibung am benetzten Umfang sowie in der Wasseroberfläche an der Luft) und W_i einen irrtümlich in obige Gleichung eingefügten Wert, von dem gesagt ist, daß er infolge der inneren Bewegungen des Wassers Beschleunigung verzehrend auftrete. Zentralbl. der Bauverwaltung, Jahrg. 1912, S. 486, Spalte 2 unten.

z. B. die Schwere, welche auch im Innern des Körpers an jedem seiner Massenteile angreifen. Die Bezeichnung äußere Kraft soll also nur besagen, daß die Einwirkung der Kraft von außen kommt.

2. Der Antrieb: Kraft mal Zeit „Kt"[1]) und die Änderung der Bewegungsgröße mv.

Die Zeitdauer t einer Kraftwirkung ist dann von besonderer Bedeutung, wenn K als äußere Kraft auftritt; das Produkt beider ist für die Beschleunigung oder Verzögerung der Masse m des betroffenen Körpers maßgebend. Es ist:

(Gl. 1) $$Kt = m(v_2 - v_1)$$

oder

(Gl. 2) $$K = \frac{m(v_2 - v_1)}{t}.$$

Darin nennt man mv die Bewegungsgröße und es bedeuten v_1 und v_2 den Anfangs- bzw. Endwert der Geschwindigkeit.

Satz 2: Die Änderung der Bewegungsgröße einer Masse ist gleich dem Produkt aus der äußeren Kraft und der Zeit ihres Auftretens, d. h. gleich dem Antriebe, welcher auf die Masse wirkt.

Unterliegt die Kraft einer zeitlichen Veränderung, nun K_x geschrieben, dann wird:

(Gl. 3) $$K_x\,dt = m\,dv$$

und

(Gl. 4) $$\int K_x\,dt = \int m\,dv.$$

3. Die Spannkraft und die algebraische Summe der Antriebe.

Da eine Kraft K allemal nur gleichzeitig mit ihrer Reaktion $-K$ auftritt und die Zeitdauer ihrer Wirkungen dabei die nämliche ist, folgt die Beziehung:

(Gl. 5) $$K.t + (-K.t) = 0$$

---

[1]) Über die hier verwendeten Bezeichnungen und die in der Technik gebräuchlichen Dimensionen siehe S. 25—29 und über die benutzten Gleichungen Abschnitt III.

für eine Kraft unveränderlicher Größe, oder:

(Gl. 5a) $$K_x dt + (-K_x dt) = 0$$

für eine Kraft veränderlicher Größe.

Satz 3: Die algebraische Summe der Produkte „Kraft mal Zeit“ ist im ganzen gleich Null.

Das heißt: erleidet ein Massensystem den Antrieb $K.t$, dann wirkt auf das andere Massensystem, von welchem aus ersteres den Antrieb erfährt, ein Antrieb $(-K.t)$, so daß für beide zusammengenommen deren algebraische Summe Null wird.

4. Die Spannkräfte und die Bewegungsgröße eines Massensystems.

Legt man durch ein Massensystem an beliebigem Orte einen Schnitt, und wirkt an demselben normal zur Schnittfläche eine Kraft K, dann tritt als deren Reaktion zugleich die Gegenkraft $(-K)$ auf. Wirkt K auf den Teil des Systems, dessen Masse m_1 ist und $(-K)$ auf den anderen Teil der Masse m_2, dann findet sich:

$$K.dt = m_1 dv_1$$

und

$$(-K).dt = m_2.(-dv_2).$$

Das Negativzeichen bei dv_2 rührt daher, weil die Masse m_2 durch $(-K)$ in Richtung von v_1 (hier als positive Richtung bezeichnet) Verzögerung erleidet. Es folgt:

$$K.dt + (-K).dt = m_1 dv_1 + m_2(-dv_2)$$

oder nach Gl. 5a:

(Gl. 6) $$m_1 dv_1 + m_2(-dv_2) = 0.$$

Satz 4: Die Wirkungen innerer, in einem System auftretender Spannkräfte, wozu auch innere Widerstände, z. B. innere Reibungsspannkräfte gehören, vermögen keine Änderung der Bewegungsgröße des Systems als Ganzes hervorzurufen; letzteres kann nur durch die Wirkung äußerer Kräfte geschehen.

Für das ganze Weltall folgt hieraus der Satz:

Satz 4a: Die Änderung der Bewegungsgröße[1]) ist für das Weltall, algebraisch zusammengefaßt, gleich Null, und das zwar für jede Richtung des Raumes verstanden (Satz über die Erhaltung der Bewegungsgröße).

Das ergibt sich aus Gl. 6, da im Weltall nur das Bestehen von Spannkräften, welche ein Kraftpaar bilden und in K wie $-K$ zerfallen, möglich ist. Das Auftreten äußerer Kräfte ist am Weltall aber ausgeschlossen, weil äußere Kräfte immer von etwas außerhalb des Systems Liegendem ausgehen, und letzteres doch nicht vorhanden sein kann, anderenfalls sich die Betrachtung nicht auf das ganze Weltall bezogen hätte.

5. Die Arbeit A und die Änderung der Energie.

Unter Arbeit A versteht man die Betätigung einer Kraft längs eines Weges s. Das Maß der Arbeit ist gleich dem Produkt aus beiden. Es wird:

(Gl. 7) $$A = K . s$$

oder, da der Weg $s = v . t$,

(Gl. 7a) $$A = K . vt.$$

---

[1]) Die Auswertung der Beziehung zwischen Kraft mal Zeit und Änderung der Bewegungsgröße ist in dieser Schrift an einer Reihe von Beispielen erfolgt; sie ist hier besonders hervorgehoben, da deren Ausnutzung oft schnell zu Ergebnissen führt und die Anschauung belebt. Es findet sich insbesondere das Maß der auftretenden Kraft K nach Gl. 2. Es geht daraus zudem noch hervor, worauf das Wesen der Kraft beruht; siehe darüber S. 34.

Das Gesetz über die Erhaltung der Bewegungsgröße (Satz 4) ist in neuerer Zeit durch die so vielfache Hervorhebung des Gesetzes über die Erhaltung der Energie allzusehr in den Schatten gerückt.

Man hat bei Anwendung des Gesetzes über die Erhaltung der Bewegungsgröße jedoch zu beachten, daß jenes nur da anwendbar ist, wo in Richtung der betrachteten Bewegung keine äußere Kraft wirkt. Fließt z. B. ein Stoff in einem konischen Rohr, dann ändert sich von Ort zu Ort dessen Bewegungsgröße, weil der Druck der Wandungen auf die Flüssigkeit (ihre Aktion) eine Komponente in Richtung der Flüssigkeitsbewegung besitzt; letztere läßt sich durch ihr Negativ, die am Gefäß (hier am konischen Rohr) auftretende Reaktion messen. Siehe darüber Näheres im Abschnitt VI, 2, b, e u. f., S. 116, 118 u. 121 über die Ausbildung von Düsen.

Hierin ist K als nach der Zeit unveränderlich gedacht. Es folgt:

(Gl. 8) $dA = K.ds$

oder

(Gl. 8a) $dA = K.v\,dt$ bei veränderlichem K.

(Gl. 9) $A = \int K ds.$

(Gl. 9a) $A = \int K.v\,dt$

oder es wird, da nach Gleichung 4 $\int K dt = \int m\,dv$:

(Gl. 10) $A = m \int v\,dv$

und zwischen den Grenzen v_1 und v_2 genommen:

(Gl. 10a) $$A = m \left| \begin{matrix} v = v_2 \\ \\ v = v_1 \end{matrix} \right. \frac{v^2}{2} = \frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2}.$$

Hierin bezeichnet man bekanntlich $\frac{m v^2}{2}$ mit E, d. h. als Energie der bewegten Masse m. Wir haben also gefunden:

Satz 5: Die auf die Masse m übertragene Arbeit A erzeugt an jener eine Änderung der Bewegungsenergie, welche der Größe nach der aufgewendeten Arbeit gleich ist.

In vorstehendem ist K eine äußere Kraft, und es sind v_1 und v_2 die nacheinander erreichten äußeren Bewegungen der Masse m, in Richtung der Kraft verstanden. Tritt dazu noch ein Widerstand, eine Reaktion ($-K_1$), dann entstehen verwickelte Beziehungen. Ein Teil der durch K zugeleiteten äußeren Energie wird dann stationär, nunmehr in Form innerer Schwingungen oder Wärmebewegung auftretend. Das führt z. B. zur Erwärmung eines Körpers, auf welchen Schläge ausgeführt werden, zu der Entzündung eines Pfahlkopfes unter den Schlägen des Fallblockes einer Ramme oder zum Erglühen der Lampe unter der Wirkung des elektrischen, ihren Glühfaden durcheilenden Stromes. Das Studium der Reaktion und ihrer Wirkungen bildet also einen der wichtigsten Teile der Bewegungslehre. Abschnitt 9, S. 11 hier behandelt die Frage, was entsteht, wenn sich einer Bewegung radial schwingender Massen der Widerstand der unendlichen Massen des unendlichen Raumes entgegenstellt.

6. Die Erhaltung der Energie.

Satz 6: Die Summe der Energie bleibt im Weltall konstant, da nach Satz 3 die algebraische Summe der Arbeit das bleibt und weil ferner nach Satz 5 Energieänderung nur durch Arbeit hervorgerufen werden kann. Es vermag also ein Massensystem nur zu dem Betrage an Energie zuzunehmen, wie ein anderes an Energie verliert.

7. Die Fallhöhe Δh und die Änderung der Geschwindigkeit.

Ist die treibende Kraft, wie bei dem freien Fall, das Gewicht G des Körpers, dann wird, da der Weg s des fallenden Körpers durch Δh gegeben ist:

$$A = K.s = G.\Delta h \quad \text{(vgl. Gl. 7)}$$

und es wird nach Gl. 10a:

$$G.\Delta h = \frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2};$$

hierin $G = mg$ gesetzt, folgt:

$$mg.\Delta h = \frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2}$$

und

(Gl. 11) $$\Delta h = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}.$$

Diese Beziehung wird in der Technik, zumal in der technischen Hydraulik viel benutzt; siehe dazu Abschnitt VII, 2, S. 134. Dort wird $\frac{v^2}{2g}$ als dynamische Druckhöhe bezeichnet, d. h. als die Höhe, welche ein Körper entgegen der Schwere vermöge seiner Anfangsgeschwindigkeit v erreichen kann, bis v zu Null wird. Man kann auch von potentieller Druckhöhe sprechen.

Satz 7: Im freien Fall ist die Änderung der Höhe h gleich der Änderung der dynamischen Druckhöhe $\frac{v^2}{2g}$.

8. Spannungsänderung des statischen Druckes σ und der Geschwindigkeit bei nicht komprimierbarer Flüssigkeit.

An nicht komprimierbarer, also auch nicht expansionsfähiger Flüssigkeit wirkt nur der Unterschied im statischen Druck σ als

treibende Kraft; man pflegt diesen in der Technik vielfach in der Form zu geben:

(Gl. 12) $$\sigma = \gamma h$$

und

(Gl. 12a) $$h = \frac{\sigma}{\gamma}.$$

Darin bedeutet γ das Raumeinheitsgewicht der Flüssigkeit und h die Höhe einer Flüssigkeitssäule, welche an ihrer Basis durch ihr Gewicht die Spannung σ an statischem Druck zu erzeugen vermöchte. Aus Gl. 12a und Gl. 11 folgt:

$$\frac{\Delta\sigma}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}$$

und $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ gesetzt:

(Gl. 13) $$\sigma_1 - \sigma_2 = \gamma\frac{v_2^2}{2g} - \gamma\frac{v_1^2}{2g}$$

oder

(Gl. 13a) $$\sigma_1 + \gamma\frac{v_1^2}{2g} = \sigma_2 + \gamma\frac{v_2^2}{2g}.$$

Hierin ist σ der statische Druck, während $\gamma\frac{v^2}{2g}$ als dynamischer Druck bezeichnet wird.

Satz 8: Erfolgt die Geschwindigkeitsänderung einer nicht komprimierbaren Flüssigkeit nur unter der Wirkung einer Abnahme des statischen Druckes, in der Bewegungsrichtung verstanden, dann bleibt die Summe aus dem statischen Druck σ und dem dynamischen Druck $\gamma\frac{v^2}{2g}$ von Ort zu Ort konstant, d. h. gleich einer Konstanten C.

(Gl. 13b) $$\sigma + \gamma\frac{v^2}{2g} = C.$$

9. Eine Haupteigenschaft der Radialschwingung.

Bis zum Oktober 1888 war ich bei den Zollanschlußbauten im Hamburger Staatsdienst tätig gewesen. Dort fand ich nebenher im Anschluß an die Tagungen des Hamburger Zweigvereins der Deutschen Meteorologischen Gesellschaft und im persönlichen

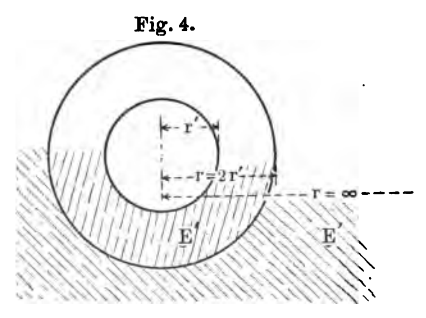
Verkehr mit den Herren Meteorologen der Deutschen Seewarte vielfache Anregung, mich mit Bewegungsproblemen zu beschäftigen. Insbesondere hat mich auf diesem Gebiet mein nachmaliger Freund, der Meteorologe Herr Admiralitätsrat i. R. Prof. Dr. h. c. Köppen gefördert, welchem Herrn ich die Einführung in die theoretische Meteorologie in erster Linie verdanke. Dann als Professor für Wasserbau an die Technische Hochschule in Karlsruhe berufen, gab ich mich sowohl praktischen Studien auf meinem Fachgebiet, insbesondere aber auch theoretischen Betrachtungen über die Wasserbewegung hin, aus welcher Zeit mehrere Veröffentlichungen von mir vorliegen. Damals verkehrte ich auch mit unserem derzeitigen, jetzt verstorbenen Kollegen, Herrn Professor Dr. Hertz, welcher just seine Experimente mit der Aussendung elektrischer Wellen durchführte. Dann kam mir die Vorstellung, daß bei Ausbreitung von Schwingungen mit radialer Schwingungsbahn der Elemente, ähnlich wie bei Wasserstrahlpumpen, eine Änderung des statischen Druckes im Umkreise des Aussenders erfolgen müsse. Die ersten Aufzeichnungen darüber stammen aus jener Zeit. Einzelne Veröffentlichungen sind in der Sache meinerseits erfolgt, in welchen aber allemal zuviel als schon bekannt vorausgesetzt wurde, was deren Aufnahme Abbruch tat. Jahrzehnte sind darüber hingegangen, und ist es jetzt meine Absicht, in Lieferung 2 umfassender auf diese Vorgänge einzugehen, zu deren tiefergehendem Verständnis ich mich nur nach und nach durchgerungen habe. Dabei hat allemal ein äußerer Antrieb vorgelegen, wenn ich die Bearbeitung dieses Problems aufs neue aufnahm, einmal z. B. waren das Untersuchungen über die Umformung von Wasserwellen, welche sich in trichterartig erweiternden oder verengenden Gerinnen fortpflanzen.

Der vorstehend gegebene Satz 8 (Gl. 13) findet bei diesen Untersuchungen eine Auswertung. Von der Oberfläche eines Aussenders mögen radial nach auswärts gerichtete Antriebe die Masse des umgebenden Raumes in radiale Bewegung versetzen (siehe die Nachschrift zu Satz 5).

Zunächst sei der statische Druck im umgebenden Raum überall gleich groß, und zwar gleich C, gleich demjenigen in der Unendlichkeit. Dieser Zustand ist aber nicht von Dauer. Es sinkt alsbald der statische Druck im Umkreise des Aussenders, wie das auch bei der Saugestrahlpumpe der Fall ist, und dann

kämpfen die sich ausbreitenden Kugelschal-Druckwellen gegen einen nach außen hin zunehmenden statischen Druck an. Anfänglich führen die Wellen Masse in die Ferne, das hört aber bald auf, und es besteht zuletzt die Beziehung (Gl. 13b): $\sigma + \gamma \frac{v^2}{2g}$ = Konstante C. Da nun σ nach außen hin zunimmt, sinkt der Wert $\gamma \frac{v^2}{2g}$ bei Übertritt der Welle auf Kugelschalen von größerem Radius. In der weiteren Untersuchung wird dann das Gesetz, nach welchem v mit wachsendem Radius r der Kugelschalen abnimmt, abgeleitet und dann durch Integration die Energiemenge bestimmt, welche die einzelnen Kugelschalen aufzunehmen vermögen. Sobald im stationären Zustande, wenn die Wellen keine Masse mehr radial in die Ferne führen, die Abnahme des statischen Druckes im Umkreise des Aussenders also ihren Meistbetrag erreicht hat und ein stationärer Zustand eingetreten ist, vermindert sich der Wert v der Radialschwingung nach außen hin so schnell, daß die äußeren Kugelschalräume nur noch sehr kleine Beträge an Energie zu beherbergen vermögen.

Fig. 4.



Die Integration $E = \int dE = \int dm \frac{v^2}{2}$ ergibt, daß die Kugelschalzone radialer Abmessung $r = 2r'$ bis $r = \infty$ nach erfolgter Sättigung nur die gleiche Energiefülle $E' = \sum \frac{m v^2}{2}$ enthält, wie die Kugelschalzone von $r = r'$ bis $r = 2r'$; darin bedeutet r' den Radius des Aussenders. Nennen wir die ganze Energie, welche die Kugeloberfläche vom Radius r', bei gegebener Spannung oder Schwingungsgröße, am Aussender auftretend, aussenden kann, E, dann ist $E = 2E'$.

Satz 9: Eine auf Radialschwingung beruhende Energieform wird vom Aussender nur auf ganz begrenzte Zeit in die Ferne geleitet. Alsbald tritt ein statischer Zustand ein, bei welchem das Strömen der Energie auf-

hört, weil die Masse des unendlichen Raumes mit Energie dieser Art gesättigt ist, so daß die Energie eine statische Form angenommen hat. Darin besitzt die Radialschwingung innige Verwandtschaft zur Elektrizität, und zwar in letzterem Fall zur statischen Elektrizität. Die Masse des unendlichen Raumes wirkt dann als Isolator.

Die Integration $E = \int dE$ wird in Lieferung 2 durchgeführt, als Summation ist diese Berechnung von mir schon früher einmal gegeben[1]).

Das Studium der Bewegungsvorgänge öffnet uns den Blick in manche Tiefen der physikalischen Natur; sie erleichtert uns ihr Verständnis. Daher dürfte es sich empfehlen, Untersuchungen über Bewegungsvorgänge hinfort mehr zu begünstigen, als das bis jetzt geschehen ist. Leider sind Studien dieser Art durch die berufliche Trennung nach Fachrichtungen naturgemäß erschwert, während die Bewegungslehre tunlichst alle physikalischen Gebiete, sowie deren Grenzgebiete in ihrem Zusammenhang erfassen sollte.

Ia. Bewegungsformen und Kraftarten.

Eine Übersicht.

1. Die Spannkräfte oder inneren Kräfte und die äußeren Kräfte.

Eine meiner älteren Arbeiten[2]) behandelt die Spannkräfte, aus Aktion und Reaktion zusammengesetzt, und zwar geordnet nach der relativen räumlichen Lage beider zueinander. So entstehen die Druck-, Zug-, wie Schubspannkräfte usw., wie Fig. 5 das zeigt.

Das so große Gebiet der Statik umfaßt die Gesetze der Zusammensetzung und Zerlegung der Spannkräfte, deren beide Teile

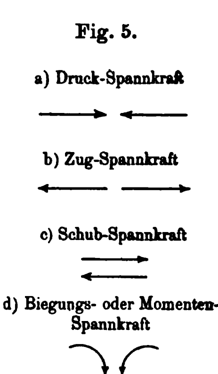
---

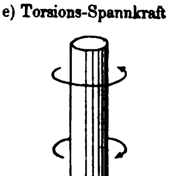
[1]) Autographen-Sammlung Darmstaedter, vormals Königl. Bibliothek Berlin, „Was unsere Arbeitsleistung bestimmt“ (darin Beziehungen der Radialschwingung zur statischen Elektrizität). 16 S. Manuskript. Febr. 1918.

[2]) Siehe „Systematik der Kräfte — 1896 —“ den Hinweis S. 149.

einander an Größe gleich, aber in entgegengesetztem Sinne wirkend, einander das Gleichgewicht halten. Die Spannkräfte sind bekanntlich zwar innere Kräfte, z. B. die Spannkraft eines Stabes; denkt man sich aber einen Stab durchschnitten, dann nennt man den Teil der Spannkraft, welcher vom einen Stababschnitt am Orte der Schnittfläche auf den anderen Stabteil geäußert wird, eine äußere Kraft K_a, auch wohl kurz als Kraft K bezeichnet; siehe Fig. 6 (siehe auch Fig. 3, S. 5).

Fig. 5.





Ein statisches System liegt vor, wenn alle äußeren Kräfte, welche auf dasselbe einwirken, zusammen gleich Null sind, also einander aufheben. Dann verbleibt das vorher in Ruhe befindliche System in Ruhe und der in Bewegung befindliche Körper in gleichförmig fortschreitender Bewegung. Allemal besteht dann für die Kräfte der Richtung, in welcher der Bewegungszustand keiner Änderung unterliegt, die Beziehung:

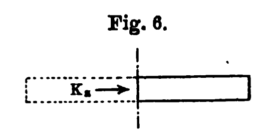
(Gl. 14) $$\sum K_a = 0;$$

Gleichung für den Zustand der Ruhe, wie für gleichförmige, z. B. gleichförmig fließende Bewegung.

Die Zerlegung der äußeren Kräfte in Aktion und Reaktion führt zu der Beziehung

(Gl. 15) $$\sum K_a = \sum W_a;$$

Fig. 6.



oder für die Summen deren Resultierende gesetzt:

(Gl. 15a) $$K_a = W_a;$$

darin bedeutet K_a die Summe oder Resultierende der äußeren treibenden und W_a diejenige der äußeren hemmenden Kräfte. Bei Brücken z. B. ist die Summe der Lasten durch K_a und diejenige der Auflager-Reaktionen durch W_a gegeben. Die Richtung von W_a ist derjenigen von K_a entgegengesetzt.

Da es selbstverständlich ist, daß hier nur die äußeren Kräfte in Frage kommen, läßt man den Index a meistens fort und schreibt:

(Gl. 15b) $$K = W.$$

2. Die Hauptarten der Bewegungsvorgänge und Kräfte, nach räumlichen Vorgängen geordnet.

A. Die den Einzelteilen einer Körpermasse gemeinsame Bewegung, d. h. die Schwerpunktsbewegung oder **äußere** Bewegung einer Körpermasse.

a) Die geradlinige Bewegung[1].

α) Die einfache geradlinige Bewegung.

β) Die geradlinige Bewegung wechselnden Bewegungssinnes oder die lineare Schwingung.

b) Die Drehschwingung, auch Revolution genannt. — Der Körper vollführt gleichzeitig zwei zueinander normal stehende Schwingungen, welche sich zu einer Drehbewegung, ohne Drehung des Körpers um sich selbst, zusammensetzen. Ein Pendel z. B., dessen elastische Stange oben fest eingespannt ist, so daß sie sich nicht um ihre Achse drehen kann, während unten das Pendelgewicht im Kreise bewegt wird, vollführt Drehschwingung; siehe auch S. 20 und Abschnitt V, A, 8 und Fig. 31, S. 75.

α) Die Zentripetalkraft tritt am Zentrum auf.

β) Die Zentripetalkraft wirkt von außerhalb der Schwingungsbahn her auf den Körper ein.

c) Die Bewegung vielfach wechselnder Richtung.

B. Bewegungsformen in und an einem Körper, ohne Schwerpunktsbewegung desselben.

a) Längs- oder Querschwingungen in einem Körper.

b) Die Drehung, auch Rotation genannt.

c) Bewegungen vielfach wechselnder Richtung in einem Körper.

d) Geordnete Bewegungen.

C. Zusammengesetzte Bewegungsformen, durch das gleichzeitige Auftreten von Arten vorstehend benannter Bewegungen bedingt.

---

[1]) Die geradlinige Bewegung, wie überhaupt eine Bewegung bestimmter Form, ist allemal nur gedachter Art, bezogen auf ein als ruhend angenommenes Achsenkreuz. In Wirklichkeit sind alle Bewegungen zusammengesetzter Art, so daß bei vielen Untersuchungen die Ergänzungskräfte relativer Bewegung des ganzen Systems (hier jenes Achsenkreuzes) in bezug auf ein anderes Achsenkreuz noch in Betracht kommen, z. B. für die Bewegung eines Körpers (zumal der Luft) auf der rotierenden Erde die ablenkende Kraft der Erdrotation.

3. Beispiele zu den Bewegungsformen und Kraftarten A.

Die einfach geradlinige Bewegung bedarf keiner Erläuterung, sie wird übrigens, wie schon erwähnt, in Wirklichkeit nur auf sehr begrenzter Strecke angenähert erreicht, da auf jeden sich bewegenden Körper immer mehrfache Kräfte einwirken, welche dessen Bewegungsrichtung zeitlich ändern.

Zu A, a, α. Zu unterscheiden sind die geradlinig gleichförmige Bewegung und die beschleunigte oder verzögerte geradlinige Bewegung. Bei ersterer fehlt die äußere Kraft, welche Änderung erzeugen könnte, im letzteren Fall besteht eine solche, die als Druck-, Zug- oder Schubkraft auftreten kann.

Eine Druckkraft entsteht, wenn der bewegte Körper auf eine andere Masse trifft, welche sich langsamer bewegt und ersterem daher (für ihn vorkopf) ein vorgelagertes Hemmnis bietet. Die von der bewegten Masse ausgehende Kraft nennt man dabei die Aktion, hingegen bezeichnet man den Widerstand der getroffenen Masse als Reaktion. Beide sind am Ort der Berührungsflächen der Massen einander immer an Größe gleich, aber von entgegengesetztem Sinn ihrer Richtung, denn sie sind ja die beiden Teilkräfte einer Spannung, hier einer Druckspannung (vgl. Fig. 5a, S. 15). Bei gleicher Bewegungsrichtung erleidet die schneller bewegte, treffende Masse, auf welche die Reaktion einwirkt, Verzögerung, hingegen die zuvor langsamer sich bewegende Masse, auf welche die Aktion wirkt, Beschleunigung.

Eine Zugkraft besteht, wenn die hemmende, langsamer bewegte Masse am hinteren Ende der ins Auge gefaßten Masse angreift, sie zurückhaltend (vgl. dazu Fig. 5b).

Eine Schubkraft tritt auf, wenn die hemmende Masse sich seitwärts der bewegten Masse befindet (vgl. Fig. 5c). Unter seitwärts ist hier jeder Ort links oder rechts über oder unter der bewegten Masse verstanden. Das Studium der Schubkräfte, die Art ihrer Übertragung und Wirkung umfaßt viel Forschungsstoff; es läßt sich auf rein theoretischem Wege nicht immer durchführen, sondern setzt eingehende Experimentaluntersuchungen voraus. Die meisten Abhandlungen über die Theorie fließender Wasserbewegung behandeln seit Jahrzehnten das Auftreten und

die Wirkungsweise der Schubkräfte im Stromlängenschnitt, sowie die Verteilung ihrer Größe im Stromquerschnitt.

Bei festen Körpern wird in deren Innern das Auftreten von Schubkraft durch ihre Materialfestigkeit ermöglicht. Zwischen zwei festen Körpern übernimmt das an ihrer Berührungsfläche die Reibung. Wo beides zusammen wirkt, spricht man vom Gleitwiderstand, im Eisenbeton das z. B. in bezug auf die Aufnahme von Schubkräften zwischen den Eiseneinlagen und dem Beton. Eine meiner letzten Arbeiten[1]) handelt davon; sie betont die Notwendigkeit, den Schubkräften und ihren Reaktionen, zusammen Schubspannkräfte genannt, noch mehr Interesse entgegenzubringen, als das bisher schon geschah, da Unfälle an Eisenbetonbauten meist durch Überwindung der Schubfestigkeit oder Haftfestigkeit des Eisens am Beton herbeigeführt worden sind.

Auch die Reibungskräfte gehören zu den Schubkräften; siehe darüber eine ältere Schrift von mir[2]).

An Flüssigkeiten treten vier Arten des Gleitwiderstandes auf. Die erste Art entspricht der Festigkeit, sie wird bedingt durch Adhäsionskräfte und besteht auch im Ruhezustand der Flüssigkeit. Vermöge dieses Gleitwiderstandes haftet so viel Wasser an der Oberfläche eines eingetauchten und wieder herausgehobenen Körpers, daß derselbe feucht bleibt. Auch der Wassertropfen, der Hauch an der Fensterscheibe, beide werden durch jene Art des Gleitwiderstandes am Herabfallen verhindert.

Weiter bestehen da zwei Arten inneren Gleitwiderstandes von Flüssigkeit an Flüssigkeit und eine Art äußeren Gleitwiderstandes von Flüssigkeit an der Oberfläche fester Körper, nur auftretend, wenn zwischen den an- oder übereinander hingleitenden Körpern ein relativer Bewegungsunterschied besteht, das Wasser z. B. fließt.

Zwischen zwei übereinander hingleitenden Flüssigkeitsschichten tritt an deren Berührungsfläche einmal ein Gleitwiderstand auf, den der Physiker Reibung nennt, und welcher sehr klein ist. Er zeigt sich nur bei recht langsamer Bewegung der tropfbaren oder gasförmigen Flüssigkeit und nur dann, wenn die

---

[1]) Siehe den Hinweis S. 149 (Einführung in den Eisenbeton).

[2]) „Über den Begriff Reibung und Bewegungsgröße (wie Kraft) bei fließenden (Turbulenz), schwingenden und gleitenden Massen“, von M. Möller, Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes, Jahrg. 1890, S. 231—252. Verlag von S. Simion, Berlin W 57, Bülowstr. 56.

Schichten sich nicht miteinander mischen, sondern die Flüssigkeitsfäden über- und nebeneinander in paralleler Ordnung verbleiben. Man nennt das die laminare Bewegung (von lamina, das Blättchen, die Lamelle, abgeleitet). Diesem Bewegungszustand steht die turbulente Bewegung gegenüber (turbulent = ungestüm, stürmisch), bei welcher Massenteile einer Schicht in die andere übertreten, die Massen sich mischen und aufeinander stoßen. Dabei entsteht als Widerstand der Turbulenzwiderstand, welcher hunderttausendemal größer sein kann als ersterer, d. h. als der vom Physiker als Reibung bezeichnete Widerstand. In der wassertechnischen Wissenschaft bedarf letzterer kaum der Beachtung, es sei denn, daß die Grundwasserbewegung von diesem Gleitwiderstande abhängig ist. Im übrigen hat man in der Technik immer mit so großen Wassergeschwindigkeiten zu tun, daß da allemal nur der große Turbulenzwiderstand auftritt, welchen wir im Ingenieurwesen als inneren Reibungswiderstand zu bezeichnen pflegen. Besser wird es sein, in Zukunft, um Verwechslungen mit dem physikalischen Begriff der Flüssigkeitsreibung vorzubeugen, hier innerer Gleitwiderstand oder Turbulenzwiderstand zu sagen.

Einen Versuch, die Größe des inneren Gleitwiderstandes der Flüssigkeit bei Turbulenz oder Turbulenz und Querströmung mathematisch zu fassen, machte ich zuerst im Jahre 1890 (siehe die Fußnote S. 18).

Eine Abhandlung über die Verteilung der Größe der Schubspannkräfte oder vielmehr der Schubspannungen über den Querschnitt eines offenen Flusses oder eines durch eine Eisdecke abgeschlossenen Stromes oder einer Rohrleitung bietet Krey[1]) (Vorstand der Pr. Versuchsanstalt für Flußbau und Schiffahrt auf der Schleuseninsel, Berlin).

Außer diesen beiden Arten innerer Schubwiderstände oder Gleitwiderstände besteht ferner noch der äußere Gleitwiderstand bewegter Flüssigkeit am Umfang in Berührung mit den festen Wandungen der Umschließungen, z. B. den Rohrwandungen oder der Sohle und den Böschungen eines Wasserlaufs, sowie in der Oberfläche offener Wasserläufe an der Luft. Die Größe dieser Gleitwiderstände richtet sich nach ganz anderen Beziehungen als

[1]) H. Krey, Zentralblatt der Bauverwaltung, Jahrg. 1909, S. 489—492.

erstere. Da gelten Gesetze, welche zumal für die Aufstellung der Gleichung über die Größe gleichförmig fließender Bewegung von Bedeutung sind, während die inneren Reibungswiderstände für die Verteilung der Geschwindigkeitsgrößen über den Stromquerschnitt maßgebend sind.

Zu A, a, β. Die lineare Schwingung tritt ein, wenn die Ortsveränderung des Körpers wechselweise nach beiden Richtungen so große Widerstände (Reaktionen) hervorruft, daß Umkehr der Bewegung erfolgt. Der schwingende Körper entsendet dabei Kräfte von wechselndem Richtungssinn in die Ferne, für welche der Sprachgebrauch keinen zusammenfassenden Namen besitzt. Als Beispiel dieser Bewegungsform sei die schwingende Saite genannt, welche die Tonwelle erzeugt. Man kann hier von der Schallwellenkraft reden, da von ihr getroffene Körper in Schwingung versetzt werden, so z. B. das Trommelfell unseres Ohres, welches den Ton unserem Hörsinn vermittelt. Die Kraft der Schallwelle macht beim Donner die Fensterscheiben fühlbar erzittern, oder sie veranlaßt deren Sprung bei nicht zu fernen Explosionen.

Zu A, b. Drehschwingung vollzieht jeder Punkt der Schubstange (Pleuelstange) des Kurbelgetriebes; es ist das eine kreisende Bewegung eines Körpers, eines Massenteilchens, nicht um seinen Schwerpunkt, sondern um einen außerhalb desselben liegenden Punkt. Von dem in Drehschwingung befindlichen Körper geht eine Fliehkraft (Zentrifugalkraft) aus, welche fortgesetzt ihre Richtung wechselt, wie der Faden einer geschwungenen Schleuder. Man könnte sie, von letzterer abgeleitet, als Schleuderkraft bezeichnen. Drehschwingung vollführt auch das Wasserteilchen bei dem Vorübergange einer Wasserwelle und jeder Punkt einer Körperoberfläche, parallel zu welcher im Körper selbst eine Druckschwankung fortschreitet, eine Welle verläuft, außen als Oberflächenwelle sich ausbildend; vgl. Fig. 29, 31 und 37.

Bei der Schleuder ergibt sich im Faden, der den Körper mit dem Zentrum verbindet, Zugspannung (siehe Fall α). Wo die Reaktion der Fliehkraft (die Zentripetalkraft) von außen wirkt (Fall β), entsteht an der äußeren Seite des die Drehschwingung vollziehenden Körpers Druck. Druckwellen mit rotierendem Erzeugungsort werden dann hervorgerufen und radial in die Ferne gesandt.

Ähnlich so wie Rotationen, z. B. die Rotation des Wassers in einer Zentrifugalpumpe, Saugewirkung, also Anziehungskraft hervorruft, vermögen das Drehschwingungen zu tun. Die Achse, in deren Richtung die Zentrifugalpumpe die Wassermassen anzieht, fällt mit ihrer Rotationsachse zusammen; sie steht normal zur Ebene der Drehbewegung. Die Achse, längs welcher Drehschwingungen saugend wirken, d. h. Anziehung äußern, steht gleichfalls normal zur Ebene der Drehbewegung; für den Magnetismus, so wird in der Folge erläutert, entspricht dieselbe (darin besteht für mich kein Zweifel) der magnetischen Achse. Das ist am einfachsten für den elektrischen Kreisstrom, das Solenoid abzuleiten. (Siehe Lieferung 2.)

Zu A, c. Ein Massenteilchen kreise innerhalb einer Kugelschale, dabei nacheinander alle möglichen Bahnen einschlagend und Richtungen verfolgend; das Teilchen äußert so Zentrifugalkraft fortgesetzt wechselnder Richtung, welche auf die Umschließung von innen her einen Druck ausübt. Dieser wirkt im zeitlichen Mittel für die Flächeneinheit der Umschließung wie statischer Druck und berechnet sich hinsichtlich seiner Größe wie dieser, siehe darüber den Abschnitt V, A, Beispiel 6, S. 69 u. 70.

Insbesondere entspricht die physikalische Vorstellung der Wärmebewegung des Gasmoleküls, und zwar der äußeren Bewegung desselben, dem Fall A, c ungeordneter, hier wechselweise nach allen Richtungen des Raumes hin und her schwirrender Bewegung, deren Wirkung nach außen hin den äußeren oder statischen Druck des Gases erzeugt.

4. Beispiele zu den Bewegungsformen B.

Zu B, a. Längs- oder Querschwingungen werden bei jedem Zusammenstoß zweier Körper erzeugt. Auf das umgebende Mittel, z. B. die Luft übertragen, rufen diese die Schallwelle hervor. Je nach dem Elastizitätszustande der Körper gestalten sich jene Schwingungen verschiedenartig. Die inneren Bewegungen sich treffender Moleküle werden ganz anderer Art, nämlich von höherer Ordnung der Bewegung sein, als diejenigen der Körper, welche aus Molekülen bestehen, und deren Elastizität mit der Molekülbewegung (dem in bezug auf das Molekül äußeren Teil der Wärme) in Beziehung steht.

Die Schwingung eines Körpers entsteht dadurch, daß nur ein Teil seiner Masse, durch eine Kraft beeinflußt, zunächst in Bewegung gerät, während andere Teile derselben noch ruhen oder erst geringere Geschwindigkeit angenommen haben oder andere Bewegungsrichtung besitzen. Tritt die treibende Kraft dabei als Druck auf, dann ergeben sich für die relative Bewegung der Teilchen aufeinander zu gerichtete Geschwindigkeiten, Stauvorgänge sind die Folge, Wellenberge entstehen. Umgekehrt erzeugt eine Zugkraft Wellentäler, in welchen die Massen bei Bildung des Tales eine auseinander gerichtete relative Bewegung besitzen. Die Bezeichnung „Wellenberge und -täler" ist von der Erscheinung der Oberflächenwelle, z. B. der Wasserwelle entnommen. Im Inneren der Körper tritt unter Umständen, wenn nämlich ein seitliches Ausweichen nicht erfolgen kann, nur ein Wechsel des statischen Druckes ein. Die Form der Welle erscheint dann nur in der zeichnerischen Darstellung des Druckwechsels, welche entsteht, wenn man die Größen des statischen Druckes als Ordinaten zu der Achse aufträgt, längs welcher die jeweiligen Druckwerte sich zu gleichem Zeitpunkt vorfinden.

Im Wellenberg wird Bewegungsgröße vom Ausgangsort ihrer Erzeugung fort in die Ferne geleitet. Im Wellental findet das Umgekehrte statt, hier wird Bewegungsgröße (äußere Bewegung) dem Ausgangsort der Wellenerzeugung zugeleitet. In beiden Fällen wird Bewegungsenergie in die Ferne geleitet.

Überall, wo Bewegungsgröße mv in Frage kommt, bewirkt die Richtung von v einen Gegensatz der Wirkungen und ihrer Erscheinungsformen, jeweils positiver und negativer Art, während in bezug auf die kinetische Energie $\frac{mv^2}{2}$, weil hier v im Quadrat vorkommt, ein Gegensatz nicht besteht, einerlei ob v negativ oder positiv ist. Der Wellenberg leitet aber außerdem potentielle Energie in Form von Druckspannung in die Ferne, das Wellental hingegen negative potentielle Energie in Form von Zugspannung oder Unterdruck. Der Gegensatz im Wesen positiver und negativer Elektrizität wird daher aller Voraussicht nach darin bestehen, daß die eine auf positiver, die andere auf negativer Bewegungsgröße beruht; siehe darüber Lieferung 2. Dort wird auch erörtert, wie durch das Zusammenwirken innerer Schwingungen (z. B. Wellen) in einem Körper im Verein mit einer rückläufigen

äußeren Bewegung zwar Energie fortgeleitet wird, nicht aber Bewegungsgröße, so daß der die Energie leitende Körper im ganzen äußerlich in Ruhe verharrt. Das geschieht, wenn die Bewegung in die Ferne sich in kurzer Zeitspanne vollzieht, hingegen die rückläufige Bewegung längere Zeit zur Verfügung hat, erstere also nur ein kleineres Massenteilchen m, letztere die größere Masse M als Träger besitzt.

Von besonderer Bedeutung wird der Gegensatz des Aussendens positiver oder negativer Bewegungsgröße, von der Oberfläche eines Zentralkörpers ausgehend, bei Radialschwingungen, weil diese ein radiales Gefälle im statischen Druck des umgebenden Mittels erzeugen, derart, daß der statische Druck bei Aussendung positiver Bewegungsgröße im Umkreise des Aussenders sinkt, bei Aussendung negativer Bewegungsgröße zunimmt; siehe S. 12 und Lieferung 2 über Radialbewegungen. Dort wird nachgewiesen, daß die Ausbreitung der elektrischen Wirkungen im freien Raum in bezug auf die Eigenart ihrer Gesetze denen der Radialbewegungen entspricht.

Zu B, b. Die Drehung oder Rotation ist in den Abschnitten V, A 1 bis 7, und diejenige der Drehschwingung oder Revolution in V, A 8 sowie im Abschnitt V, C erörtert, welcher die Rotation der Himmelskörper und das Gesetz der Flächen behandelt.

Zu B, c. Beispiele von Bewegung vielfach wechselnder Richtung in einem Körper finden sich überall. Dahin gehören die Bewegungen aller Körper auf und in der Erde, die Wärmebewegung der Moleküle bei Gasen und Flüssigkeiten, wiewohl bei letzteren schon die Bevorzugung einer geordneten Bewegung möglich ist (Auftreten flüssiger Kristalle in Flüssigkeiten). Die Erscheinungsform völlig ungeordneter, wirr durcheinander gerichteter Bewegungen nennen wir ein Chaos; dieses wird durch vielfach verschiedene Zurückwerfung (Reflexion) einer vorher geordneten Bewegung erzeugt, wobei Massen, welche vor dem Anprall an einen Widerstand eine gemeinsame Bewegung aufwiesen, nach dem Rückprall ganz verschiedenartige Bewegungen besitzen, weil die benachbarten Oberflächenteile des den Widerstand bietenden Körpers nach Richtung und Körperbeschaffenheit verschieden sind. Während ein Spiegel infolge seiner glatten Oberfläche den Lichtstrahl in der ursprünglichen Ordnung zurückwirft, tut das ein rauher Körper nicht.

Wirft derselbe überhaupt das Licht zurück, dann tut er dies in einer ungeordneten Weise. Man spricht dann von diffusem (verteiltem) Licht.

Zu B, d. Geordnete Bewegungen entstehen in der Masse des Außenraumes, wenn eine Bewegung einheitlich von einem Körper (Aussender) ausgeht, z. B. wenn von der Oberfläche desselben Radialbewegungen nach allen Richtungen in die Ferne gesandt werden, oder wenn sonstwie einer Massengruppe durch einen sie beeinflussenden Körper eine gemeinsame Bewegung erteilt wird.

II. Die verwendeten Dimensionen.

Die Schreibweise der Dimensionen möge sich hier nach der im Ingenieurwesen üblichen Form richten, welche für den praktischen Gebrauch den Vorzug der Anschaulichkeit besitzt.

Das Kilogramm bedeutet hier den Druck, welchen die Masse eines Liters Wasser von 4° C Wärme in Höhe des Meeresspiegels am 45. Breitengrad auf die stützende Unterlage äußert; es bedeutet also nicht eine Massengröße, wie das im sogenannten absoluten, in der Physik gebräuchlichen Maß- und Gewichtssystem der Fall ist.

Ferner pflegt man in der Technik die Dimensionen unter Angabe bestimmter Einheiten zu geben, also für Längen z. B. nicht zu schreiben l (Länge), sondern z. B. m (Meter).

Bei Angabe der Dimensionen seien folgende Einheiten hier bevorzugt:

für die Kraft das Kilogramm . . . . kg
„ „ Länge das Meter . . . . m
„ „ Zeit die Sekunde . . . . sek.

Andere im Ingenieurwesen gebräuchliche Einheiten, soweit dieselben hier in Frage kommen:

für Kräfte die Tonne (1000 kg); hingegen wegen seiner Kleinheit seltener das Gramm (gr),

für Zeiten die Minute, z. B. bei Leistung von Pumpenbetrieben, die Stunde bei Leistungen an Energie oder bei Angabe von Geschwindigkeiten bei Fahrzeugen.

Die in der Folge benutzten zusammengesetzten Dimensionen seien nur auf die vorgenannten einfachen Maßeinheiten bezogen.

Zusammenstellung einiger hier benutzter, meist in der Technik gebräuchlicher Dimensionen.

s	Weglänge		m
v	Geschwindigkeit (Weg durch Zeit)	$\frac{\text{m}}{\text{sek}}$	$= \text{m sek}^{-1}$
p	Beschleunigung und Verzögerung, $\pm p$ (Geschwindigkeit durch Zeit)	$\frac{\text{m}}{\text{sek}^2}$	$= \text{m sek}^{-2}$
m[1]	Masse, gemessen durch „Kraft dividiert durch Beschleunigung"	$\frac{\text{kg}}{\text{m}\,.\,\text{sek}^{-2}}$	$= \text{kg m}^{-1}\text{sek}^2$
	In kg oder t drückt man sowohl die in einem Sinn wirkende äußere Kraft aus, als auch die in beiderlei Sinn wirkende, Aktion und Reaktion zusammen umfassende Spannkraft, z. B. die Spannkraft eines Stabes.		
σ	die Spannung, d. h. die Spannkraft dividiert durch die Fläche, über welche verteilt sie auftritt, oder die Spannkraft auf die Flächeneinheit genommen, früher auch Beanspruchung genannt	$\frac{\text{kg}}{\text{qcm}}$	$= \text{kg cm}^{-2}$
	oder	$\frac{\text{t}}{\text{qm}}$	$= \text{t m}^{-2}$
Atm.	Atmosphäre, gebräuchliche Bezeichnung der Spannungseinheit . . . . ein	$\frac{\text{kg}}{\text{qcm}}$	$= \text{kg cm}^{-2}$
	Entlehnt ist diese Einheit von der mittleren Spannung atmosphärischer Luft von 10 333 kg m^{-2} (gemessen in Meereshöhe am 45. Breitenkreis) hier aber abgerundet auf 10 000 kg m^{-2} oder auf ein	$\frac{\text{kg}}{\text{qcm}}$	$= \text{kg cm}^{-2}$
	Über die anderen hier gebrauchten Dimensionen der verwendeten Größenbegriffe siehe das Weitere, insbesondere den Abschnitt III.		
ω	Winkelgeschwindigkeit, da $v = r\,.\,\omega$ (Radius mal Winkelgeschwindigkeit), so wird die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{v}{r}$, mithin . . . . $\frac{\text{m}}{\text{sek}}\cdot\frac{1}{\text{m}} =$	$\frac{1}{\text{sek}}$	$= \text{sek}^{-1}$

[1]) Die Bezeichnung für Masse m ist hier jeweils in Kursiv, diejenige für das Längenmaß Meter m in gewöhnlichen lateinischen Lettern gegeben.

Gegenüberstellung der Dimensionen in technischer

1	2	3	4
Namen	Abgekürzte Schreibweise	Technische Bezeichnung	Physikalische absolut
Länge	l	mm, cm, m, km	cm
Fläche	f oder F	mm^2, cm^2, m^2, km^2 oder qmm, qcm, qm, qkm	cm^2 oder qcm
Raum oder Volumen	V oder J	mm^3, cm^3, m^3 oder cbmm, cbcm, cbm	cm^3 oder ccm
Masse	$m = \frac{G}{g}$ *) (siehe Spalte 6)	$\frac{kg}{m\ sek^{-2}} = kg\ m^{-1}\ sek^2$	g_r (Gramm)
Zeit	t	sek, min, Std.	sek
Geschwindigkeit	$v = \frac{l}{t}$	$m\ sek^{-1}$, $\frac{km}{Std.}$	$\frac{cm}{sek}$ oder $cm \cdot sek^{-1}$
Beschleunigung oder Verzögerung	$p = \frac{v}{t} = l \cdot t^{-2}$	$m\ sek^{-2} = \frac{m}{sek^2}$	$\frac{cm}{sek^2} = cm\ sek^{-2}$
Kraft	$K = m \cdot p$ für die Schwerkraft wird $p = g$	$[kg\ m^{-1}\ sek^2$ *)$ \cdot m \cdot sek^{-2}] = kg$	$g_r\ cm\ sek^{-2} = cm\ g_r\ sek^{-2}$; $1\ cm\ g_r\ sek^{-2} = 1$ Dyn
Arbeit	$A = K \cdot l$ oder $A = K \cdot s$	kg . m oder mkg *) $1\ mkg_{techn.} = 9{,}81\ Joule_{phys.}$	1 Erg = 1 cm Dyn $= 1\ cm \cdot cm\ g_r\ sek^{-2} = 1\ cm^2\ g_r\ sek^{-2}$

und physikalischer Bezeichnungsform.

5	6
Bezeichnung praktisch	Bemerkungen
mm, cm, m, km	Vgl. z. B. als Weg; siehe Bemerkung *) in Zeile Arbeit.
wie bei 3	—
wie bei 3	—
kg, t	*) G = Gewicht und g = Beschleunigung der Schwere; da diese in verschiedenen Graden geographischer Breite verschieden groß ist, trifft das auch für G zu.
sek, min, Std. oder st	—
$\frac{m}{sec}$, $\frac{km}{Std.}$	—
—	—
1 mkg sek^{-2}	Um das kg als Krafteinheit in der Technik auswerten zu können, definiert man dasselbe als Gewicht von 1 Liter Wasser von 4^0 C, gemessen an der Erdoberfläche in der geogr. Breite $\varphi = 45^0$, wo g beträgt $g = 9{,}81$ m sek^{-2}. *) Zu Spalte 3 u. 4. $1\,kg_{techn.} = 1000\,g_{r\,techn.}$ $= 1000\,g_r \cdot g_{phys.}$ $= 1000\,g_r \,.\, 9{,}81$ m sek^{-2} $= 1000\,g_r\, 981$ cm sek^{-2} $= 981\,000\,g_r$ cm $sek^{-2}{}_{phys.}$ $= 981\,000$ Dyn.
1 Joule = 10^7 Erg = $10^7\,cm^2\,g_r\,sek^{-2}$ = $1\,m^2\,kg\,sek^{-2}$	s bezeichnet den in Richtung der Kraft zurückgelegten Weg. *) $1\,mkg_{techn.} = 981\,000\,g_r\,cm\,sek^{-2} \,.\, 1\,m$; siehe bei Kraft die Bemerkung *) und dort Spalte 4, $= 981\,kg_{phys.}\frac{m}{100}\,sek^{-2} \,.\, 1\,m = 9{,}81\,kg_{phys.}\,m^2\,sek^{-2}$, $= 9{,}81$ Joule (vgl. unter Arbeit Spalte 5 die Dimension für Joule).

(Fortsetzung.)

1	2	3	4
Namen	Abgekürzte Schreibweise	Technische Bezeichnung	Physikalische absolut
Leistung	$L = \frac{A}{t}$	1 $\text{mkg}_{\text{techn.}}$ sek^{-1} $= 9{,}81$ Joule sek^{-1} $= 9{,}81$ Watt (siehe Spalte 5) 1 PS $= 75$ mkg sek^{-1} $= 75 . 9{,}81$ Watt $= 736$ Watt $= 0{,}736$ KW (Kilo-Watt) 1 KW $= 1{,}36$ PS	1 Erg sek^{-1} $= 1\ \text{cm}^2\ \text{g}_r\ \text{sek}^{-3}$
Bewegungs-größe	$B = mv$	$\frac{\text{kg}}{\text{m sek}^{-2}} \cdot \text{m sek}^{-1} = \text{kg sek}$	$\text{g}_r\ \text{cm sek}^{-1}$
Kraft mal Zeit oder Antrieb	$K . t$	kg . sek	$\text{cm g}_r\ \text{sek}^{-2} . \text{sek}$ $= \text{cm g}_r\ \text{sek}^{-1}$
Lebendige Kraft oder kinetische Energie	$E = \frac{mv^2}{2}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m sek}^{-2}} (\text{m sek}^{-1})^2 = \text{kg m}$	$\text{g}_r\ (\text{cm sek}^{-1})^2$ $= \text{g}_r\ \text{cm}^2\ \text{sek}^{-2}$
Atmosphäre	Atm.	$\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = \text{kg} . \text{cm}^{-2}$	—
Spannung	σ	$\frac{\text{kg}}{\text{qcm}} = \text{kg cm}^{-2}$	$\text{g}_r\ \text{sek}^{-2}\ \text{cm}^{-1}$
Winkel-geschwindigkeit	$\omega = \frac{v}{r}$ *)	$\frac{\text{m sek}^{-1}}{\text{m}} = \text{sek}^{-1}$	$\text{cm sek}^{-1} . \text{cm}^{-1} = \text{sek}^{-1}$

Bemerkung. Die Masse ist hier in Kursivschrift gegeben; das Meter mit der lateinischen Letter m. Der Buchstabe g wird oft ohne Unterscheidung verwendet für Gramm und für Beschleunigung der Schwere, was besonders zu beachten ist; hier ist für Gramm g_r gesetzt.

Das Gramm „g_r“, Kilogramm „kg“ usw. pflegt man in der Technik und in der Physik gleich zu schreiben, wiewohl in der Technik unter Kilogramm eine Kraft (der Druck von 1 Liter Wasser bei 4° C[1]) auf die Unterlage verstanden ist, gemessen an der Erdoberfläche in der geographischen Breite von $\varphi = 45^0$), während unter kg in der Physik die Masse von 1 Liter Wasser bei 4° C verstanden wird, also eine um $\frac{1}{g}$ kleinere Größe. Nennen wir das Kilogramm der Technik kg_t und das Kilogramm der Physik kg_p, dann wird

[1]) Zu der genaueren Definition von einem Kilogramm gehört eigentlich noch die Angabe „gemessen bei dem äußeren Druck einer Atmosphäre“.

5	6
Bezeichnung praktisch	Bemerkungen
1 Watt $= 1$ Joule sek^{-1} $= 1\ \text{m}^2\ \text{kg}\ \text{sek}^{-3}$ 1 KW $= 1000$ Watt $= 1{,}36$ PS (siehe Spalte 3)	—
$\text{kg}\ \text{m}\ \text{sek}^{-1}$	—
$\text{mkg}\ \text{sek}^{-2}\ \text{sek}$ $= \text{mkg}\ \text{sek}^{-1}$	—
10^7 Erg $= 10^7\ \text{g}_r\ \text{cm}^2\ \text{sek}^{-2}$ $= 1\ \text{m}^2\ \text{kg}\ \text{sek}^{-2}$ $= 1$ Joule	Die potentielle Energie z. B. Zahl $C \times$ Volumen $\times$ Spannung $= \text{m}^3\ \text{kg}\ \text{m}^{-2} = \text{kg}\ \text{m}_{\text{techn.}}$
$981\ \text{kg}\ \text{cm}^{-1}\ \text{sek}^{-2}$ [siehe Spalte 6, *)]	*) 1 Atm. $= 1\ \text{kg}_{\text{phys.}} \cdot \text{g}\ \text{cm}^{-2}$ $= 1\ \text{kg} \cdot 981\ \text{cm}\ \text{sek}^{-2}\ \text{cm}^{-2}$ $= 981\ \text{kg}_{\text{phys.}}\ \text{cm}^{-1}\ \text{sek}^{-2}$.
$\text{kg}\ \text{sek}^{-2}\ \text{cm}^{-1}$	—
$\frac{\text{m}\ \text{sek}^{-1}}{\text{m}} = \text{sek}^{-1}$	*) $r =$ Radius, also Längeneinheit; $v =$ Umfangsgeschwindigkeit.

(Gl. 16) $$\text{kg}_t = \text{g} \cdot \text{kg}_p \quad \text{oder}$$

(Gl. 17) $$\text{kg}_p = \frac{1}{\text{g}} \cdot \text{kg}_t.$$

Diese Umrechnung ist erforderlich, wenn in dem technischen oder physikalischen Ausdruck die Bezeichnung einer Kraft auftritt.

In der Technik muß man den Begriff Druck für die Bezeichnung kg beibehalten, weil dieser im Sprachgebrauch so üblich ist. Man sagt z. B. der Dampfdruck mißt auf 1 qcm Fläche 10 kg. Das versteht der einfache Arbeiter; sagt man ihm aber, der Dampfdruck beträgt auf 1 qcm Fläche 10 000 Gramm (worin ein Gramm die Masse von 1 Kubikzentimeter Wasser bedeutet) multipliziert mit der Beschleunigung der Schwere $g = 9{,}81\ \text{m}\ \text{sek}^{-2}$, dann versteht er das eben nicht. Es ist zudem ein Mangel des sogenannten absoluten Maß- und Gewichtssystemes, daß sich die Einheit der Kraft, das Dyn, nur auf künstlichem Wege versinnbildlichen läßt. Zudem ist die Bezeichnung „absolut" bei jenem System auch keineswegs berechtigt, da jede Maßeinheit an sich einen relativen Begriff in sich schließt.

III. Erläuterungen zu den grundlegenden Begriffen.

1. Die Masse „*m*“.

Unter dem physikalischen Begriff der Masse verstehen wir das Stoffliche des Naturreiches, gleichsam den Baustoff desselben.

Die Masse besitzt vielgestaltige Form; sie findet sich im großen zu Himmelskörpern zusammengeballt, im kleinen Moleküle und Atome bildend oder noch feiner verteilt vor; ihr Auftreten zeigt eine Zweigliederung. Da ist zunächst die Gruppe, in welcher die Masse meist Materie genannt wird, und deren drei Arten als die Aggregatzustände „die festen, flüssigen und gasförmigen Körper“ bekannt sind. Die zweite Gruppe ist von höherer Ordnung und höherer Beweglichkeit; von ihr spricht die Physik bisher nur in bezug auf die eine Art des Ätherzustandes der Masse, in welchem dieselbe den Raum zwischen den Gestirnen und jenseits derselben erfüllt. Man ist aber nicht berechtigt, anzunehmen, daß die Reihe der Massengestaltungen damit abgeschlossen ist, denn der Äther oder die ihm zugrunde liegende Form feiner Teilung und äußerst schneller Bewegung der Masse, welche auch die Gebilde der ersten Gruppe, die festen, flüssigen und gasförmigen Körper durchsetzt, ist bisher nur als Träger der Kräfte des Licht- und Wärmestrahles, sowie der Elektrizität und des Magnetismus erkannt worden, nicht aber als Träger der Schwerkraft, dem aller Wahrscheinlichkeit nach eine andere Form der Massengestaltung zugrunde liegen wird. So finden wir im Weltall außer der Unendlichkeit von Raum und Zeit auch keine Begrenzung in der Gestaltung des Stofflichen[1]). Es ist zu beachten, daß die Wissenschaft nur das als vorhanden finden kann, was sich unmittelbar (oder durch Apparate, welche unsere Sinnesorgane ergänzen, vermittelt) sinnfällig wahrnehmen und außerdem das, was sich aus dem also gewonnenen Erfahrungsmaterial in scharfsinniger Weise schlußfolgern läßt; alles andere, vielleicht noch Vorhandene, ist für uns nicht wahrnehmbar.

Unverstanden blieb bisher der Umstand, daß sich die Körper der ersten Gruppe unter Umständen widerstandslos durch den

---

[1]) Nicht selten wird die Ansicht geäußert, man könne den Begriff der Masse entbehren; das trifft aber nicht zu, höchstens für denjenigen, welcher in Studien über das Wesen der Erscheinungsformen und Vorgänge nicht eintreten will.

Äther hindurchzubewegen scheinen, z. B. bei der Bewegung der Himmelskörper im Weltenraum oder bei der schwingenden Bewegung der Atome und Moleküle, die den Anschein erwecken, als wären sie gleichsam nur Wellen im Äther. Solches aber ist für elektrisch oder magnetisch erregte Stoffe und bei radialer Ausbreitung dieser Bewegungen im Raume nicht der Fall, worauf die technische Auswertungsmöglichkeit der durch sie bedingten elektrischen wie magnetischen Kräfte beruht. Hier entstehen Unterschiede im Ätherdruck, welcher sich aus statischem Ätherdruck und dynamischem Ätherdruck (Wellendruck) zusammensetzt.

Die Haupteigenschaft der Masse ist bekanntlich ihr Beharrungsvermögen, auch ihre Trägheit genannt, infolge derer sie sich einer Änderung ihres Bewegungszustandes widersetzt.

Als Bezeichnung der Masse pflegt man den Buchstaben „m" zu wählen. Zur Unterscheidung von dem gleichfalls durch „m" ausgedrückten Längenmaß, dem Meter, sei hier für die Masse dieser Buchstabe in Kursivschrift gegeben.

(Gl. 18) $$m = \frac{G}{g}.$$

Die Masse eines Körpers ist sein Gewicht dividiert durch die Beschleunigung der Schwere; sie ermittelt sich nach Gl. 3. Die technische Dimension der Masse ergibt sich nach S. 25 zu $\mathbf{kg\,m^{-1}\,sek^{2}}$; über die physikalische siehe S. 26 u. 27.

Besondere Eigenschaften gewinnt die Masse durch Größe und Richtung ihrer Geschwindigkeit v. Die für letztere verwendete Dimension ist $\mathbf{m\,sek^{-1}}$.

2. Die Bewegungsgröße „$m\,v$" der Masse, hier auch als B bezeichnet.

Das Produkt aus der Masse „m" und deren Geschwindigkeit v nennt man die Bewegungsgröße derselben

(Gl. 19) $$B = mv.$$

Die Bewegungsgröße besitzt infolge ihres zweiten Gliedes „v" Richtungs-, d. h. Bewegungssinn negativer oder positiver Art.

Die Dimension der Bewegungsgröße ist:

$$\frac{\text{kg}}{\text{m}\,.\,\text{sek}^{-2}}\cdot\frac{\text{m}}{\text{sek}} = \textbf{kg . sek.}$$

3. Die Energie „E".

Das Produkt aus der bewegten Masse und dem halben Quadrat ihrer Geschwindigkeit nennen wir deren kinetische Energie, d. h. Bewegungsenergie oder auch kurz Energie, früher auch lebendige Kraft genannt.

(Gl. 20) $$E = \frac{mv^2}{2}.$$

Die Dimension der Energie ist nach S. 28: mkg. Da die Geschwindigkeit hier im Quadrat vorkommt, ist für die Energie das Vorzeichen der Geschwindigkeit belanglos. Energie drückt weder Richtung noch Bewegungssinn aus; vermöge ihrer erkämpft sich die Masse entgegen vorhandenen Widerständen einen nach diesen und nach ihrer eigenen Größe sich bestimmenden Raum. So ist z. B. die Höhe h, bis zu welcher ein lotrecht emporgeworfener Körper emporsteigt, von seiner Masse m und der ihm verliehenen, und zwar hier äußeren Energie E abhängig; denn es ist:

$$h = \frac{v^2}{2g}; \quad \frac{mv^2}{2} = E; \quad \text{also} \quad h = \frac{E}{mg}.$$

Die Energie innerer Bewegung der Massenteilchen der Körper beeinflußt auch deren Raumbedürfnis, und zwar hier deren Volumen, was bei Gasen am deutlichsten hervortritt, und das insbesondere bei chemisch einfachen Gasen, weil deren Raumbedürfnis einfachster Art ist und nur von dem äußeren Druck in Abhängigkeit steht und nicht von den inneren Zugkräften chemisch verbundener Atome.

Wo es gilt, in beschränkter Zeit eine große mechanische Leistung zu verrichten, sammelt man die Energie, um sich ihrer zum geeigneten Zeitpunkt zu bedienen, das z. B. bei maschinellen Betrieben als Energie äußerer Bewegung in der schnell kreisenden Masse eines Schwungrades, oder in Form der inneren Energie unter hohen Druck gebrachter Gase.

4. Äußere und innere Bewegungsgröße und Energie.

Mit besonderer Sorgfalt ist das Wesen äußerer Bewegungsgröße, wie der Energie äußerer Bewegung, von demjenigen innerer Bewegungsgröße, wie der Energie innerer Bewegungen, zu unterscheiden. In dem Umfange, wie innere Zugkräfte die Massen

zusammenhalten, hört deren Fähigkeit sich auszudehnen auf. Hier vermag gewöhnlich nur eine Steigerung der inneren Energie eine Volumenvermehrung der Masse von Bedeutung im Kampf mit den inneren bindenden Kräften zu ermöglichen, und das nur in sehr geringem Grade, wenn die inneren bindenden Zugkräfte groß sind. Z. B. ist dies der Fall bei den chemischen Kräften und in zweiter Linie auch bei Massenanziehung für innigste Berührung der Körper.

Äußere Bewegungsgröße und Energie besitzt der im freien Raum sich bewegende Körper, das eilende Geschoß, die fortschreitende Welle; innere Bewegungsgröße und Energie besitzen die Körper nebenher infolge ihrer Wärmebewegung, z. B. im Molekül die chemisch zusammengesetzten Gase, sowie alle Massen, in welchen Schwingungen sich vollziehen oder überhaupt relative Bewegungsunterschiede, innere Strömungen, Wirbel u. dgl. bestehen.

Gleichzeitig besitzt äußere und innere Bewegung jedes Massensystem, in welchem Bewegungsunterschiede sich vorfinden.

In Fig. 7 mißt für m_1 die äußere Energie E_1 der Masse: $E_1 = \frac{m_1 . v_1^2}{2}$ und für m_2 die äußere Energie: $E_2 = \frac{m_2 . v_2^2}{2}$. Die Summe dieser Energien beider Massen: $E = E_1 + E_2$ ist daher $E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$. Es ist das aber keineswegs die äußere Energie des Systems, welche beide Massen umfaßt, denn ein Teil davon ist innere Energie, Energie innerer Bewegung des Systems $(m_1 + m_2)$. Die äußere Energie E_a des Massensystems $(m_1 + m_2)$ berechnet sich aus der mittleren Geschwindigkeit v_m beider Massen; dabei ist $v_m = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$, zu:

Fig. 7.

(Gl. 21) $$E_a = \frac{m_1 + m_2}{2} \left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Der hier gefundene Wert für E_a wird auch als Energiebetrag bezeichnet, der nach erfolgtem Zusammenstoß der Massen, nach Abzug des Stoßverlustes verbleibt.

Wie wir erkennen, hatten die Massen als System jenen Betrag an äußerer Energie bereits auch schon vor Eintritt des Stoßes, da ihre gemeinsame äußere Energie nicht gleich $E_1 + E_2$, sondern gleich jenem ermittelten Betrage E_a ist. Der Restbetrag ist auch

schon vor Eintritt des Stoßes relative oder innere Energie des Systems $(m_1 + m_2)$ gewesen.

Der bekannte Satz über die Erhaltung der Energie besagt also nur, daß die Summe der äußeren und inneren Energiemengen unverändert bleibt, mögen im Weltall Vorgänge sich vollziehen und Kräftewirkungen eintreten von ganz beliebiger Art. Äußere Energie bleibt aber nur in Einzelfällen als solche erhalten, meistens findet eine teilweise Umsetzung derselben in innere Energie statt oder umgekehrt. Wer das nicht beachtet, verwendet das Gesetz über die Erhaltung der Energie in gänzlich verkehrter, unstatthafter Weise. Das aber geschieht freilich sehr oft, fast häufiger als die richtige Verwendung.

5. Die Kraft „K".

Der Begriff der Kraft ist von abstrakter Art. Treffen z. B. infolge ihrer Wärmebewegung die Moleküle des heißen Gases explodierten Pulvers auf das Geschoß, dann übertragen sie ihre Bewegungsgröße auf dieses, demselben Geschwindigkeit erteilend. Man spricht nun, wo eine Wirkung sich zeigt, allemal von dem Auftreten einer Kraft als deren Ursache, und das daher auch hier. In dem beschriebenen Vorgange liegt aber die wirkliche Ursache, in dem Auftreten einer Kraft nur die gedachte, die angenommene Ursache jener Wirkung. Im Grunde genommen bildet also der Vorgang von Überleitung von Bewegungsgröße das Wesen des Auftretens der Kraft, wobei die übertragene Bewegungsgröße mit der Zeitdauer des Vorganges, d. h. mit der Zeitdauer der Kraftwirkung, wächst, so daß die Beziehung besteht:

(Gl. 22) $$K.t = B_2 - B_1,$$

oder wenn $B_1 = 0$

(Gl. 22a) $$K.t = B,$$

(Gl. 23) $$K = \frac{B_2 - B_1}{t},$$

(Gl. 23a) $$K = \frac{B}{t}, \text{ wenn } B_1 = 0.$$

Gl. 22 bis 23a gelten bei stattfindender Beschleunigung der sich bewegenden Masse m.

(Gl. 23b) $$K = \frac{B_1 - B_2}{t},$$

bei stattfindender Verzögerung der Masse m, veranlaßt durch die geäußerte Kraft.

Allemal ist B_2 am zeitlichen Endpunkt der Kraftwirkung und B_1 zu deren Beginn die der Masse eigene Bewegungsgröße.

(Gl. 24) $$K = \frac{\Delta B}{t},$$

(Gl. 25) $$K = \frac{m(v_2 - v_1)}{t}$$

(wo es sich um die Bewegungszunahme der Masse m handelt).

Gl. 25a) $$K = \frac{m.v}{t}, \text{ wenn } v_1 = 0 \text{ ist.}$$

Für das Zeitdifferential genommen,

(Gl. 26) $$K = \frac{dB}{dt},$$

(Gl. 27) $$K = \frac{m.dv}{dt},$$

da $\frac{dv}{dt}$ die Beschleunigung, p geschrieben, bedeutet, so wird:

(Gl. 27a) $$\frac{K}{m} = \frac{dv}{dt},$$

(Gl. 28) $$K = m.p,$$

(Gl. 28a) $$\frac{K}{m} = p.$$

Für den Sonderfall, daß die Beschleunigung der Schwere vorliegt, also $p = g$ ist, wird K zum Gewicht der Masse, bezeichnet mit G. (Technische Ausdrucksweise.)

(Gl. 29) $$G = m.g \quad \text{und}$$

(Gl. 29a) $$m = \frac{G}{g} \quad \text{(siehe Gl. 18, S. 31).}$$

Um eine bestimmte Masseneinheit zu gewinnen, muß man für die technische Ausdrucksweise, da die Beschleunigung der Schwere an verschiedenen Orten der Erde verschiedene Werte besitzt, sich auf einen Sonderwert einigen. Das ist die Beschleunigung der Schwere für Orte in Höhe des Meeresspiegels am 45. Kreis geographischer Breite verstanden. Dort ist $g = 9{,}806$ oder abgerundet $9{,}81\,\text{m}\,\text{sek}^{-2}$. Dieser Ort ist zu wählen, da er einen mittleren Wert ergibt; er ist auch für die Festlegung des Begriffes Kilogramm (S. 27 unten Spalte 6) benutzt.

Die technische Dimension der Kraft ist nach obigem das Kilogramm „kg“, da dieses als Einheit der Kraft gewählt ist, oder für große Kräfte das Tausendfache davon, die Tonne „t“.

Die Dimension der Masse ist daher nach Gl. 29a oder Gl. 18, da $m = \frac{G}{g}$, $\frac{\text{kg}}{\text{m} \, . \, \text{sek}^{-2}} = \text{kg} \, \text{m}^{-1} \, \text{sek}^2$.

6. Die Masse eines Körpers und sein Volumen.

In der Technik bezeichnet man das Gewicht der Raumeinheit eines Körpers mit γ, und sein Volumen, seinen Rauminhalt, mit V oder J. Auch hier ist γ wieder für die Höhenlage des Meeresspiegels und $\varphi = 45^0$ geographischer Breite verstanden. Es wird:

(Gl. 30) $$G = \gamma \, . \, J;$$

und nach Gl. 29a, S. 35 weiter:

(Gl. 31) $$m = \frac{\gamma}{g} \, . \, J.$$

Die Dimensionen sind nun:

von γ . . . $\frac{\text{kg}}{\text{cbm}} = \text{kg} \, \text{m}^{-3}$, für J . . . m^3, für G . . . kg.

Das eingesetzt, ergibt für $m = \frac{\gamma}{g} J$:

$\frac{\text{kg} \, \text{m}^{-3} \, \text{m}^3}{\text{m} \, . \, \text{sek}^{-2}} = \text{kg} \, \text{m}^{-1} \, \text{sek}^2$ (in der technischen Ausdrucksweise).

7. Fließende Mengen.

Die Geschwindigkeit fließender Bewegung sei v, der Stromquerschnitt f. Der in der Zeit t zurückgelegte Weg s berechnet sich zu

(Gl. 32) $$s = v \, . \, t,$$

und die in t Zeiteinheiten austretende Wassermenge

(Gl. 32a) $$J = s \, . \, f = v \, . \, t \, . \, f.$$

Fig. 8.

Die fließende Menge.

Man versteht unter ihr das in der Zeiteinheit den Querschnitt f durchströmende Volumen. Es besteht daher für t Zeiteinheiten die Beziehung $q \, . \, t = J$ und $q = \frac{J}{t}$; für J den Wert aus Gl. 32a eingesetzt:

(Gl. 33) $$q = \frac{v \, . \, t \, . \, f}{t} = v \, . \, f.$$

Die Dimension der fließenden Menge oder des fließenden Volumens ist $\mathrm{m\,sek^{-1}\,m^2 = m^3\,sek^{-1}}$.

Das Gewicht der fließenden Menge (bezeichnet G_f) mißt:

(Gl. 34) $$G_f = \frac{G}{t} = \gamma . v . f.$$

Die Dimension ist $\mathrm{kg\,m^{-3}\,m\,sek^{-1}\,m^2 = kg\,sek^{-1}}$.

Die Masse der fließenden Menge $m_f = \frac{m}{t}$ mißt:

(Gl. 35) $$m_f = \frac{m}{t} = \frac{G_f}{g} = \frac{\gamma}{g} \cdot v \cdot f.$$

Die Dimension ist $\mathrm{\frac{kg\,m^{-3}}{m\,.\,sek^{-2}}\,m\,sek^{-1}\,m^2 = kg\,m^{-1}\,sek}$.

Die Energie der fließenden Menge. $E_f = \frac{E}{t} = \frac{m v^2}{2t}$; $\frac{m}{t}$ aus Gl. 35 eingesetzt, gibt:

(Gl. 36) $$\frac{E}{t} = \frac{\gamma}{g} v f \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{\gamma}{2g} \cdot f v^3.$$

Die Dimension ist $\mathrm{\frac{kg\,m^{-3}\,m^2\,m^3\,sek^{-3}}{m\,.\,sek^{-2}} = m\,kg\,sek^{-1}}$.

Die Energie der fließenden Menge entspricht in ihrer Dimension der fließenden Arbeit, d. h. der Arbeitsleistung, der Arbeitsintensität, siehe nachfolgend diese unter 12, S. 40.

Die Bewegungsgröße B_f der fließenden Menge ist:

(Gl. 37) $$\frac{m . v}{t} = \frac{\gamma}{g} v . f . v. \quad \text{(Siehe Gl. 35.)}$$

(Gl. 37a) $$B_f = \frac{\gamma}{g} \cdot f . v^2.$$

Die Dimension ist $\mathrm{\frac{kg\,m^{-3}}{m\,sek^{-2}} \cdot m^2 \cdot m^2\,sek^{-2} = kg}$.

Es ergibt sich „kg", die Dimension der Kraft, da fließende Bewegungsgröße und Kraft dem Wesen nach dasselbe sind. Die einrichtige fließende Bewegungsgröße ist das Maß der einrichtigen, d. h. der äußeren Kraft, dabei der Widerstand, die Reaktion, fehlt oder nicht in Betracht gezogen ist. Die im zeitlichen Wechsel in +- und —-Richtung, d. h. hin und her schwingend, fließende Bewegungsgröße ist das Maß der zweirichtigen Kraft, d. h. der Spannung, deren zwei Teile die Aktion und die Reaktion bilden.

Bei gleicher Größe dieser beiden Bewegungsgrößen ist deren algebraische Summe Null, statische Verhältnisse liegen dann äußerlich vor.

Die Dimension der fließenden Menge ist der durch Division mit t gebildete Teilwert von Mengen im engeren Sinn, z. B. gesammelten Mengen, für das Wasser meist Q genannt.

(Gl. 38) $$q = \frac{Q}{t} \text{ und}$$

(Gl. 39) $$Q = q \cdot t.$$

In ähnlicher Weise entspricht nach S. 34 Gl. 23a: $K = \frac{B}{t}$ die Kraft K „einer fließenden Bewegungsgröße B_f“.

8. Kraft mal Zeit „$K \cdot t$“ (auch Antrieb genannt).

Der Antrieb, das Produkt aus Kraft mal Zeit, verleiht der Masse, auf welche die Kraft wirkt, Bewegungsgröße.

Die Dimension des Antriebes (Kraft mal Zeit) ist daher z. B.:

kg . sek.

(Siehe Gl. 22, S. 34) $$K \cdot t = B_2 - B_1.$$

(Gl. 40) $$K \cdot t = \Delta B.$$

(Gl. 41) $$K \cdot dt = dB.$$

9. Die Wucht einer Stoß- oder Kraftwirkung, hervorgebracht durch zeitliche Krafteinwirkung (Antrieb).

Für die Wucht eines Schlages ist die zeitliche Kraftleistung maßgebend, welche für ihn zur Aufwendung gelangte. Um einen Zweck zu erreichen, bedarf es oft eines wuchtigen Schlages. So zerkleinert man größere Steine mit dem kurzstieligen schweren Schlaghammer, hingegen kleinere Steine mit dem langstieligen leichten Schwunghammer. Mit letzterem würde man trotz gleichen Energieaufwandes den großen Stein nicht spalten, sondern nur dessen Oberfläche zermalmen oder nur verletzen. Desgleichen bedarf es zum Einrammen schwerer Pfähle eines Fallblockes (Bärs) von großem Gewicht. Mit einem Bär von kleinem Gewicht aber größerer Fallhöhe und gleichem Energiebetrage, wie er bei dem schweren Bär erreicht wird, würde man den schweren Pfahl zertrümmern, seinen Kopf spalten, sein Eindringen in den Boden aber nicht entsprechend fördern. Während die alte Handzug-

ramme nur Bärgewichte bis etwa 300 kg, die Ramme mit Winde (Kunstramme) bis 600 kg und die selbstwirkende Dampframme für Holzpfähle bis zu 1800 kg verwendete, genügte das für die schwereren und spröderen Eisenbetonpfähle nicht; sie vertrugen keinen harten, d. h. keinen mit großer Geschwindigkeit geführten Schlag. Man ging zu kleineren Fallhöhen und größeren Bärgewichten von 2000 bis 4000 kg bei Fallhöhen des Bärs von nur 0,5 bis 1,25 m über.

10. Die Arbeit der Kraft.

Das Produkt aus Kraft K mal Weg s, die Arbeit genannt, ist in der Mechanik, insbesondere bei Maschinenbetrieben von größter Bedeutung. Es gelte eine Last auf eine bestimmte Höhe $h = s$ zu heben, eine Last längs bestimmter Wegstrecke s zu transportieren, überall kommt das auf Arbeitsleistung (Kraftaufwand mal Weg) hinaus. Auch der dafür erforderliche Aufwand, bei Dampfmaschinen die erforderliche Kohlenmenge, wächst linear mit der Größe des Arbeitsaufwandes A; man schreibt:

(Gl. 42) $$A = K.s.$$

Die Dimension der Arbeit ist diejenige von Kraft mal Wegeslänge, oder gewöhnlich in umgekehrter Folge geschrieben, hier z. B. Meter mal Kilogramm = mkg.

Wird die Arbeit darauf verwendet, einer Masse m aus der Ruhelage heraus eine Geschwindigkeit zu erteilen, welche nach t Sekunden den Wert v erreicht, dann ermittelt sich dabei die mittlere Geschwindigkeit zu

$$v_m = \frac{0 + v}{2} = \frac{v}{2},$$

und es wird der zurückgelegte Weg s nach

(Gl. 43) $$s = v_m \cdot t = \frac{v}{2} t.$$

Dieses und aus Gl. 25 a S. 35 für $K = m \cdot \frac{v}{t}$ in Gl. 42 eingesetzt, ergibt

$$A = m \frac{v}{t} \cdot \frac{v}{2} t.$$

(Gl. 44) $$A = m \frac{v^2}{2}; \text{ Dimension mkg.}$$

Arbeitsleistung erzeugt also Energie, wenn dieselbe dazu verwendet wird, Masse zu beschleunigen.

Besaß die Masse zuvor eine Anfangsgeschwindigkeit v_1, welche infolge der Arbeitsleistung A auf v_2 gesteigert wird, so daß die Anfangsenergie $\frac{m \cdot v_1^2}{2}$ auf $\frac{m v_2^2}{2}$ wächst, dann findet sich aus

$$\frac{m v_1^2}{2} + A = \frac{m v_2^2}{2} \quad \text{und}$$

(Gl. 45) $$A = m \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}; \quad \text{Dimension mkg.}$$

Umgekehrt vermag die mit Energie begabte Masse Arbeit auszuführen. So würde z. B. ein ohne Dampf fahrender Eisenbahnzug, wenn Roll- und Luftwiderstände fehlten, bei $v_2 = 20$ m Anfangsgeschwindigkeit auf ansteigender Bahn gut 20 m Höhe hinanrollen, bevor er zum Stehen gelangte. Auch das Geschoß überwindet infolge seiner Energie die sich ihm entgegenstellenden Widerstände auf gewisser Strecke, worauf seine Durchschlagsfähigkeit beruht. Auch das Gasmolekül erkämpft sich den Raum (d. h. seinen Weg s) entgegen dem äußeren Gasdruck aus gleicher Ursache.

11. Die Dimension der Energie.

Da sich Arbeitsleistung in Energie umsetzen läßt und umgekehrt, sind deren Dimensionen dieselben.

Nach S. 25 ist die Dimension der Masse (kg m^{-1} sek^2); da nun $E = \frac{m v^2}{2}$, so wird die Dimension der Energie:

$$\text{kg m}^{-1} \text{sek}^2 \text{m}^2 \text{sek}^{-2} = \textbf{mkg.}$$

12. Die Leistung A_t.

Die Leistung (Arbeit in der Zeiteinheit), auch Arbeitsintensität genannt, ist gleichsam fließende Arbeit. Etwa so, wie die fließende Wassermenge q sich aus der gesammelten Wassermenge, dem Wasservolumen Q nach Gl. 38, S. 38, ermittelt zu $\frac{Q}{t} = q$, findet sich hier aus der Arbeitsmenge A die Leistung oder fließende Arbeit zu:

(Gl. 46) $$A_t = \frac{A}{t}.$$

Die Dimension ist dementsprechend für die Sekunde als Zeiteinheit $\frac{\text{m kg}}{\text{sek}} = \text{m kg sek}^{-1}$. Als eine Einheit der Leistung gilt im Maschinenwesen auch die Pferdestärke, geschrieben „PS":

$$1\,\text{PS} = 75\,\text{mkg sek}^{-1}.$$

Die Physik hat in der Elektrizitätslehre als Einheit der Leistung das Watt gewählt, die Elektrotechnik, da das Watt für sie einen zu kleinen Wert besitzt, das Tausendfache desselben, das Kilowatt, geschrieben „KW".

Es entspricht:

(Gl. 47) $$1\,\text{PS} = 736\,\text{Watt}.$$

$$75\,\text{mkg sek}^{-1} = 1\,\text{PS} = 736\,\text{Watt} = 0{,}736\,\text{KW}$$

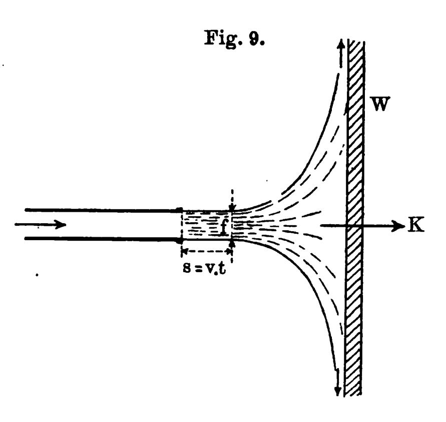
(Gl. 47 a) $$1\,\text{mkg sek}^{-1} = \frac{736}{75} = 9{,}81\,\text{Watt (vgl. S. 28).}$$

IV. Beziehungen zwischen sekundlich übertragener Bewegungsgröße und Kraft, an Beispielen erläutert.

Die sekundlich übertragene Bewegungsgröße, gleichsam die fließende Bewegungsgröße, ist das Maß der Kraft.

1. Die Druckkraft oder Aktion eines Wasserstrahles.

Fig. 9.



Einem Rohre (Fig. 9) entströmt ein Wasserstrahl vom Anfangsquerschnitt f. Dort ist dessen Geschwindigkeit v. Das Wasser treffe auf eine normal zum Strahl stehende Wand W, werde quer zum Strahl ringsum abgelenkt und entweiche nach außen hin in einer Richtung ausschließlich normal zum Strahl. Es ist die Druckkraft K zu berechnen, welche der Wasserstrahl gegen die Wand äußert.

Nach Gl. 24, S. 35, besteht die Beziehung $K = \frac{\Delta B}{t}$. Darin ist K die Kraft, welche im Sinne der Bewegung aufgewendet werden muß, um in der Zeit t die Bewegungsgröße der Masse, auf welche die Kraft wirkt, um ΔB zu mehren, oder welche, wie hier geschieht, vom Strahl bei völliger Entziehung der Bewegungsgröße der ursprünglichen Bewegung entgegen geäußert werden muß.

Da nach der Voraussetzung das Wasser zuletzt in Richtung auf die Wand hin keine Bewegungsgröße mehr besitzt, ist hier ΔB gleich der ursprünglich im Strahl vorhandenen Bewegungsgröße B, so daß wird:

(Gl. 48) $$K = \frac{B}{t}.$$

In t Sekunden tritt nun an Wassermenge J aus:

$$J = s.f = v.t.f;$$

an Wassergewicht $G = \gamma.J = \gamma.v.t.f;$

an Wassermasse $m = \frac{\gamma}{g}.J = \frac{\gamma}{g}t.f.v;$

an Bewegungsgröße $B = m.v = \frac{\gamma}{g}tfv^2;$

mithin wird:

(Gl. 49) $$K = \frac{B}{t} = \frac{\gamma}{g}fv^2$$

(siehe auch Gl. 37a, S. 37, und Fig. 8 u. 9).

Beispiel: Gegeben $f = 1\,\text{dm}^2 = 0{,}01\,\text{m}^2$, $v = 6\,\text{m}\,\text{sek}^{-1}$, $\gamma = 1000\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$ und $g = 9{,}81\,\text{m}\,\text{sek}^{-2}$.

Gesucht: K, die Kraft, welche der Strahl, wenn er im Anprall mit der Wand W seine Bewegungsgröße in Richtung gegen die Wand ganz verliert, auf letztere äußert.

$$K = \frac{1000\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}}{9{,}81\,\text{m}\,\text{sek}^{-2}} \cdot 0{,}01\,\text{m}^2 . 6^2\,\text{m}^2\,\text{sek}^{-2};$$

$$K = \frac{1000 . 0{,}01}{9{,}81} \cdot 36 \frac{\text{kg}\,\text{m}^{-3}\,\text{m}^2\,\text{m}^2\,\text{sek}^{-2}}{\text{m} . \text{sek}^{-2}};$$

$$K = 36{,}7\,\text{kg}.$$

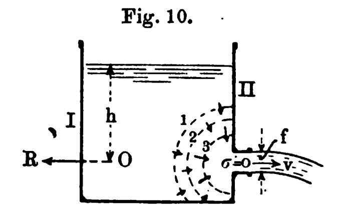
2. Der Rückdruck oder die Reaktion des Wasserstrahles.

(Siehe hierzu auch die Integration und genauere Betrachtung dieses Vorganges im Abschnitt VI, 2, Fig. 51, S. 112.)

Aus einem Gefäß (Fig. 10) tritt ein Wasserstrahl aus; sein Querschnitt ist hinter der Öffnung zunächst gleich f. Die mittlere Wassergeschwindigkeit beträgt an dieser Stelle v. Es ist die Reaktion R zu bestimmen, mit welcher das Gefäß entgegen der Richtung des austretenden Strahles nach rückwärts getrieben wird.

Diese Aufgabe bietet ein Gegenstück zu Beispiel 1. Dort lag Verzögerung des Wassers vor, eine Druckkraft K war die Folge, hier findet Beschleunigung statt, daher muß nun eine Kraft von entgegengesetzter Richtung, aber gleicher Größe, Reaktion genannt, entstehen, welche wieder wird:

Fig. 10.



(Gl. 49a) $R = \frac{\gamma}{g} f . v^2.$

Fig. 11.

Im Gefäß findet gleichsam eine Spaltung der Wasser**spann**kraft, aus K und ($R = -K$) bestehend, statt; davon wird K auf Beschleunigung des Wassers verwendet, die Gefäßwandung II nicht beeinflussend, während R, nach rückwärts wirkend, wie zuvor auf die Gefäßwandung I drückt. Das Gefäß wird also in Richtung R Bewegung erstreben.

Es bleibt noch hervorzuheben, daß gegenüber dem Ruhezustande bei austretendem Wasserstrahl auch rings um die Öffnung herum der Wasserdruck sinkt. Ist er vor Wand I in Höhe der Öffnung σ, dann beträgt er neben der Öffnung weniger. Siehe darüber die genaueren Ermittlungen im Abschnitt VI, 2.

So kommt es, daß der Gesamtwasserdruck auf die Wand II um $2\sigma f$ kleiner ist, als auf die Wand I und nicht etwa nur um den Druck σf, welcher für Wand II am Ort der Öffnung in Fortfall gerät.

Die Beziehung $R = 2\sigma f$ ergibt sich aus Gl. 49 wie folgt: Es ist der Wasserdruck, die Wasserspannung, $\sigma = \gamma . h$, mithin

$h = \frac{\sigma}{\gamma}$, und die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser austritt (vgl. Abschnitt VI, 1a),

$$v = \sqrt{2gh} \quad \text{und} \quad v^2 = 2gh;$$

für $h = \frac{\sigma}{\gamma}$ gesetzt, wird: $v^2 = 2g\frac{\sigma}{\gamma}$.

Das in Gl. 49 eingesetzt, gibt:

$$R = \frac{\gamma}{g} f 2g \frac{\sigma}{\gamma} \text{ (vgl. Abschnitt VI, 2a, und Fig. 52).}$$

(Gl. 50) $$R = 2\sigma f.$$

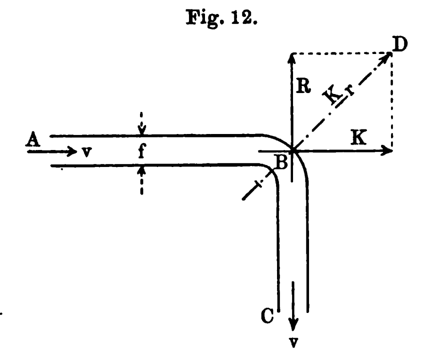
Hier ist f nicht genau die Querschnittsfläche der Öffnung, weil in ihr noch Druck herrscht, sondern die etwas kleinere Querschnittsfläche des austretenden Wasserstrahles, ein wenig außerhalb des Gefäßes am Ort seiner Einschnürung, und zwar dort gemessen, wo die Wassergeschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ beträgt; siehe Eingehenderes darüber im Abschnitt VI, 2.

3. Kraftwirkungen an einem durchströmten, in der Horizontalebene rechtwinklig gebogenen Rohr. Vereinigte Wirkung von Aktion und Reaktion.

a) Die Flüssigkeit sei bei A, B und C ohne Spannung.

Ein Rohr zeigt eine Biegung um $\alpha = 90°$; es ist die Kraft K zu ermitteln, welche die es durchströmende Flüssigkeit auf die Rohrwand in Richtung ihrer Geschwindigkeit v äußert, weil ihr diese am Ort der Umbiegung, in Richtung $A—B$ verstanden, genommen wird. Die Lösung der Aufgabe unterscheidet sich von Beispiel 1 bis dahin nicht, wieder ist:

Fig. 12.



$$K = \frac{\gamma}{g} f v^2$$

(s. Gl. 49 u. Abschnitt V, A, 5a).

Gleichzeitig bietet Fig. 12 ein Beispiel für das Auftreten einer Reaktion. Rohrteil $A—B$ kann als ein Gefäß aufgefaßt werden,

dem in Richtung $B-C$ Wasser entströmt. Es entsteht die Reaktion $R = K = \frac{\gamma}{g} f v^2$.

Die aus K und R zusammengesetzte, in Richtung BD resultierende Diagonalkraft mißt mithin:

(Gl. 51) $$K_r = \sqrt{2}\,\frac{\gamma}{g} f v^2.$$

b) Bei A, B und C herrscht in der Flüssigkeit eine Spannung σ.

Es wirkt alsdann bei A in Richtung $A-B$ und bei C in Richtung $C-B$ jeweils noch die Spannkraft σf, also in Richtung BD die Spannkraft $\sqrt{2}\,\sigma f$. Die Resultierende aus Aktion und Reaktion, sowie aus der Wirkung der Spannkräfte bei A und C mißt dann:

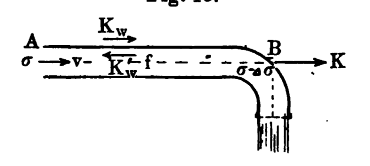
(Gl. 52) $$\sum K_r = \sqrt{2}\left(\frac{\gamma}{g} f v^2 + \sigma f\right).$$

c) Einfluß der Reibung fließender Bewegung auf das Rohr.

Vorstehend ist unter a) und b) die Reibung, welche die strömende Flüssigkeit am Rohr ausübt, noch nicht mit berücksichtigt.

Bei der strömenden Bewegung übt die Flüssigkeit an den Rohrwandungen eine Reibungskraft K_w aus, deren Reaktion $-K_w$ dahin wirkt, in der Flüssigkeit ein Druckgefälle (Druck- oder Spannungsgradienten) zu erzeugen. Die Flüssigkeit steht dabei unter der Wirkung der äußeren Kräfte, von A her wirkend σf, von B her nach A hin gerichtet $(\sigma - \Delta\sigma).f$ und der Reibungsreaktion $K_w' = -K_w$. Da unter dem Einfluß dieser äußeren Kräfte die Flüssigkeit keine Beschleunigung noch Verzögerung erleidet, indem die Flüssigkeitsmenge q und die Querschnittsfläche f, mithin auch $v = \frac{q}{f}$ konstant ausfallen, so besteht die Gleichung

Fig. 13.



$$\sigma f - (\sigma - \Delta\sigma) f - K_w = 0$$
$$\Delta\sigma f = K_w.$$

Mithin tritt an Stelle von Gl. 49 für die auf das Rohr übertragene Kraft die Beziehung:

$$K = \frac{\gamma}{g} f v^2 + K_w + (\sigma - \Delta\sigma) f$$

und darin zwar $+K_w$ und nicht $K'_w = -K_w$, weil die am Rohre angreifende Reibung des Wassers und nicht deren Reaktion K'_w in Frage kommt.

Für K_w den obigen Wert $\Delta\sigma f$ eingesetzt, wird:

(Gl. 53) $$K = \frac{\gamma}{g} f v^2 + \sigma f.$$

Beiläufig sei bemerkt, daß der Druck zwischen Wandung und strömendem Wasser bei dem parallelwandigen Rohr die Bewegung des Wassers nicht ändert, da er zu dessen mittlerer, in der Rohrachse gemessener Bewegung normal steht. In konischen Rohren ist das anders; siehe Abschn. VI, 2b, S. 116.

4. Sonderfall fehlender Rohrumbiegung, aber unter Berücksichtigung der Rohrreibung (Rohr wieder horizontal).

Es fällt das Glied $\frac{\gamma}{g} f v^2$ aus der Berechnung heraus, da bei A und B die Bewegungsgröße der Flüssigkeit in Richtung AB die nämliche ist. Es wird für Rohrteil A—B:

(Gl. 54) $$K = \sigma f.$$

Fig. 14.

Die strömende Flüssigkeit überträgt auf das Rohr im Sinne AB eine Kraft $K_w = \sigma f$, mit welcher es in Richtung AB wandern, oder bei A abreißen will, wofern seine Lagerung oder seine Zugfestigkeit das nicht hindert.

5. Kraftwirkungen an dem um 180° gebogenen, horizontalen, durchströmten Rohr ohne Beachtung der Reibung K_w (Fig. 15).

Die Beziehungen sind dieselben, wie bei Fall 3, nur daß hier Aktion K und Reaktion R gleichgerichtet sind.

a) Es wird für den Fall $\sigma = 0$:

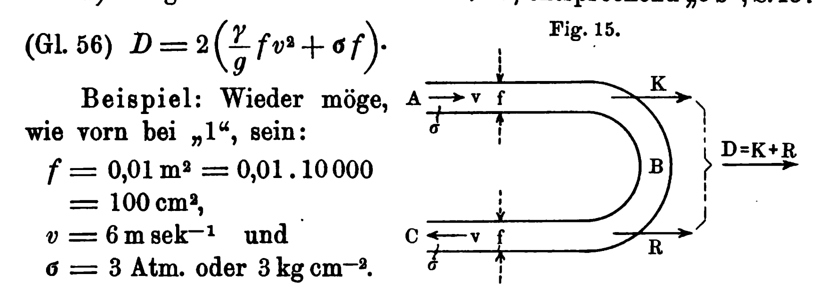
$$D = K + R = 2K, \text{ da } K = R,$$

(Gl. 55) $$D = 2\,\frac{\gamma}{g}\,f v^2.$$

b) Desgleichen für den Fall $\sigma > 0$, entsprechend „3b", S. 45:

(Gl. 56) $$D = 2\left(\frac{\gamma}{g}\,f v^2 + \sigma f\right).$$

Fig. 15.



Beispiel: Wieder möge, wie vorn bei „1", sein:

$f = 0{,}01\ \text{m}^2 = 0{,}01 \,.\, 10\,000$
$= 100\ \text{cm}^2,$
$v = 6\ \text{m}\ \text{sek}^{-1}$ und
$\sigma = 3$ Atm. oder $3\ \text{kg}\ \text{cm}^{-2}$.

Nach Gleichung 56 wird dann:

$$D = 2\,(36{,}7 + 3 \,.\, 100) = 673{,}4\ \text{kg}.$$

6. Das Schalenkreuz zur Messung der Luftgeschwindigkeit im Winde.

Die Wirkung des Schalenkreuzes (Fig. 16) beruht bekanntlich darauf, daß die an den um D sich drehenden Armen befestigten Schalen in der Lage „a" jeweils ihre Hohlform dem Winde ent-

Fig. 16.

gegenkehren, hingegen bei „b" die erhabene Form. Es liegt daher bei „a" teilweise rückläufige Luftbewegung vor, die nach Fall 5 oben zu einem Werte der Aktion K_1 größer als $\frac{\gamma}{g}\,f v^2$ führt, während bei „b" der Luft nicht ihre ganze Bewegungsgröße in Richtung des Windes entzogen wird, da die Luft seitwärts schräg-abgleitet. Hier wird mithin K_2 kleiner als $\frac{\gamma}{g}\,f v^2$ (Gl. 49, S. 42). Das Schalenkreuz erstrebt daher Drehung im Sinne der Kraft K_1.

Ausgenutzt werden die hier erörterten Kraftwirkungen in anderer Form vielfach im Maschinenwesen z. B. im Turbinenbau, was durch die Bezeichnung ihrer Arten: Aktions- und Reaktionsturbinen auch zum Ausdruck gebracht ist.

7. Die äußere Bewegung des Gasmoleküls und der statische Gasdruck.

Es ist die mittlere Geschwindigkeit v molekularer Schwingung der atmosphärischen Luft für 0 Grad Temperatur zu berechnen.

Das Molekül eilt abwechselnd mit der Geschwindigkeit v auf die Umschließung, Wand W zu, reflektiert bei dem Stoß und bewegt sich mit der Geschwindigkeit $-v$ zurück, vgl. Fig. 17.

Fig. 17.

Fig. 18.

Betrachtet man den Augenblickszustand, dann zeigt sich das Bild Fig. 18. Die Hälfte der Moleküle eilt in Richtung auf die Wand zu, die andere bewegt sich entgegengesetzt. Es liegt da gleichsam eine Vereinigung der beiden Stromrichtungen Fig. 15, S. 47 vor, eine Durchdringung derselben.

Die Kraft D als Summe der Kraftwirkungen beider Ströme oder Schwingungsreihen berechnet sich auch hier nach der Gl. 55, S. 47:

$$D = K + R = 2 \cdot \frac{\gamma}{g} f v^2.$$

Hierin ist aber anstatt γ (das Raumeinheitsgewicht der Luft, welches alle schwingenden Teilchen umfaßt) nur $\frac{\gamma}{2}$ zu setzen, da nur die Hälfte aller Teilchen (d. h. diejenigen, welche auf die Wand hingerichtet sind) zum Anprall an die Wand gelangen, während die rückläufigen, mit der Geschwindigkeit $-v$ begabten Teilchen schon zur Wirkung gelangt sind; sie kommen nicht mehr in Frage. — Untersucht man den Fall einer ungeordneteren Be-

wegung der Teilchen, z. B. wo diese einander nicht treffen, sondern, aneinander vorbeieilend, auf die Wand stoßen, dann gelangt man zu gleichem Ergebnis.

Anstatt γ also $\frac{\gamma}{2}$ gesetzt, wird:

$$D = 2\frac{\gamma}{2g} f v^2,$$

(Gl. 57)
$$D = \frac{\gamma}{g} f v^2;$$

hierin bedeutet γ das Raumeinheitsgewicht der Luft oder des Gases, v die Geschwindigkeit der Teilchen (Moleküle) und f die Wandfläche, auf welche der Luftdruck oder allgemein der Gasdruck wirkt.

(Gl. 58)
$$v = \sqrt{\frac{D \cdot g}{\gamma \cdot f}}.$$

$\frac{D}{f} = \sigma$ gesetzt, ergibt:

(Gl. 58 a)
$$v = \sqrt{\frac{\sigma g}{\gamma}}.$$

Bei einer Atmosphäre Pressung und bei 0° C, wie hier vorausgesetzt sei, beträgt das Gewicht eines Kubikmeters Luft bekanntlich $\gamma = 1{,}293$ kg und der Druck auf die Fläche eines Quadratmeters 10333 kg.

Nach Gl. 58 wird somit:

$$v = \sqrt{\frac{10333 . 9{,}81}{1{,}293 . 1}} = 279{,}98,$$

$$\boldsymbol{v = 280\,\mathrm{m\,sek^{-1}}}.$$

Siehe auch die Gl. 49, S. 42: $K = \frac{\gamma}{g} f v^2$

und Gl. 49 a, S. 43: $R = \frac{\gamma}{g} f v^2$

Zusammen also: $D = K + R = 2\,\frac{\gamma}{g} f v^2.$

Hierin ist aber für γ wieder nur das Raumeinheitsgewicht zu verstehen, welches sich ergibt, wenn man nur die Teilchen einer Bewegungsrichtung in dem Raum sich enthalten denkt. Man hat daher anstatt γ hier zu setzen $\frac{\gamma}{2}$, wenn man unter γ

das Raumeinheitsgewicht der aus beiden Molekülreihen sich zusammensetzenden Luft (oder allgemein des Gases) versteht. Dann erhält man abermals

$$D = 2\,\frac{\frac{\gamma}{2}}{g}\,f v^2 = \frac{\gamma}{g}\,f v^2.$$

Die Dimension von D ermittelt sich zu:

$$\frac{\text{kg m}^{-3}}{\text{m sek}^{-2}}\,\text{m}^2\,(\text{m sek}^{-1})^2 = \text{kg}.$$

Aus Gl. 58a folgt für 1 Atm. Pressung, also für $\sigma = 1\,\text{kg cm}^{-2}$ oder genauer $1{,}0333\,\text{kg cm}^{-2}$

$$v = \sqrt{\frac{1{,}0333\,\text{kg cm}^{-2} \,.\, 9{,}81\,\text{m sek}^{-2}}{1{,}293\,\text{kg m}^{-3}}}$$

und $\text{cm}^{-2} = \left(\frac{\text{m}}{100}\right)^{-2} = 10000\,\text{m}^{-2}$

$$v = 280\,\text{m sek}^{-1},\ \text{wie oben.}$$

Diese Geschwindigkeitsgröße steht in der bekannten Beziehung zur Schallgeschwindigkeit; siehe Lieferung 2.

Der atmosphärische Druck wirkt nun aber nicht nur in einer Richtung des Raumes, sondern in allen drei Richtungen desselben. Man kann die molekulare Bewegung so auffassen, wie wenn die Schwingung gleichzeitig nach den drei Richtungen erfolge, oder zurzeit jeweils nur in einer Richtung, dann aber mit der entsprechend größeren Geschwindigkeit v_1, welche sich nach der Raumdiagonale des Würfels aus der Gleichung berechnet:

$$v_1^2 = v^2 + v^2 + v^2,$$

$$v_1 = v \,.\, \sqrt{3}.$$

Es wird $\qquad v_1 = 280 \,.\, \sqrt{3} = 484{,}98$

rund $\qquad v_1 = 485\,\text{m sek}^{-1}.$

Dies ist die mittlere, äußere Massengeschwindigkeit des Moleküls (bei symmetrischer Gestalt ist das dessen Schwerpunktsgeschwindigkeit). Vgl. hierzu Abschnitt V, A, 6, dort dasselbe in anderer Weise ermittelt.

Außerdem besitzt das Molekül innere Bewegungen als notwendige Folge des Stoßvorganges. Beide Bewegungsarten nennt man in ihrer Gemeinschaft „die Wärmebewegung“. Siehe darüber des weiteren Lieferung 2.

Es ist noch zu bemerken, daß im Rückprall sich die Rückbewegung nur dann mit der vollen Geschwindigkeit v vollzieht, wenn der getroffene Körper die nämliche Temperatur wie das Gasmolekül besitzt. An einer kalten Wand reflektiert ein Dampfmolekül nicht voll, was zu dessen Abkühlung und im Sonderfall zur Kondensation des Dampfes führt. Mit dem Verlust der molekularen Geschwindigkeit ist dann zugleich der Spannungsverlust verbunden. Der kalte Kondensator der Dampfmaschine dient diesem Zweck, um die Spannung des verbrauchten Dampfes zu mindern, damit kein Rückdruck auf den Dampfkolben von nachteiliger Größe verbleibt. Das Vakuum entsteht so, d. h. die Verminderung des Dampfdruckes unter die Pressung des atmosphärischen Drucks.

8. Die Druckbeanspruchung von Pfahlbündeln (Dükdalben) durch bewegte Schiffe.

Ein Schiff von 1000 t Gewicht treibe mit $v = 0{,}2\,\mathrm{m\,sek}^{-1}$ Geschwindigkeit gerade auf ein Pfahlbündel zu und gelange im Stoß mit demselben innerhalb einer Zeitspanne von $t = 2$ Sekunden zur Ruhe. Wie groß ist der dabei entstehende Druck in seinem mittleren Wert, also K als konstant aufgefaßt?

Nach Gl. 23 b, S. 34 ist:

$$K = \frac{B_1 - B_2}{t}.$$

$$B_1 = \frac{G}{g} \cdot v = \frac{1\,000\,000}{9{,}81} \cdot 0{,}2; \quad B_2 = 0;$$

$$K = \frac{1\,000\,000 \,.\, 0{,}2}{9{,}81 \,.\, 2} = \text{rund } \frac{1\,000\,000 \,.\, 0{,}2}{10 \,.\, 2},$$

$$K = 10\,000\,\mathrm{kg}.$$

Um die Stoßkraft zu mindern, pflegt man die Pfahlbündel nachgiebig zu konstruieren; es wird dann die Zeit t des Stoßes vergrößert und die Stoßkraft entsprechend verkleinert, bei Verdoppelung der Zeit z. B. auf die Hälfte herabgemindert.

In Wirklichkeit wird die Stoßkraft im vorliegenden Falle zu Anfang den Wert Null und zum Schluß bei starker Verbiegung der Pfähle etwa den doppelten Betrag, hier also 20 000 kg erreichen. Um den Bruch derartiger Pfahlbündel zu verhindern, werden in den Häfen bis zu 16 oder mehr Pfähle zu einem Bündel vereinigt.

Es ist übrigens Aufgabe des Schiffsführers, einen derartig zentralen Stoß zu verhüten. Trifft das Fahrzeug mit der Scheuerleiste am schrägen Teil des Bugs das Hindernis, dann gelangt einmal nur ein Teil der Schiffsmasse zur Wirkung, ferner wird die Zeit des Zusammenstoßes verlängert und weiter dem treffenden Schiffsteil nicht die ganze Geschwindigkeit genommen, so daß infolge dieser Umstände die Stoßkraft weitaus kleiner ausfällt.

Bei dem Bau der Düsseldorfer Rheinbrücke galt es, für steuerlos gewordene Rheinschiffe, welche ihren Weg durch die belassene Durchfahrtsöffnung etwa verfehlen würden, das Antreiben gegen die hölzernen Brückenmontagegerüste zu verhindern. Zu dem Zweck wurden Drahtseile, von Schwimmkästen getragen und seitwärts verankert, vor den Gerüsten her ausgespannt. Diese besaßen große Nachgiebigkeit und bildeten ein wirksames Mittel, den Stoß zu mildern.

Alle Federungen erfüllen den gleichen Zweck, durch Verlängerung der Zeit des Stoßvorganges dessen Härte zu mindern.

9. Die Bremskraft bei Eisenbahnzügen.

Ein mit $v = 15\,\mathrm{m\,sek}^{-1}$ Geschwindigkeit fahrender Eisenbahnzug von 500 Tonnen Gewicht soll innerhalb eines Zeitraumes von $t = 30$ Sekunden zum Stehen gebracht werden. Wie groß ist die erforderliche Bremskraft zwischen den gehemmten (gebremsten) Rädern und den Schienen, die Größe der Bremskraft als konstant aufgefaßt, während sie in Wirklichkeit von der Fahrgeschwindigkeit abhängig ist? Roll- und Luftwiderstand seien hier außer acht gelassen.

Die anfängliche Bewegungsgröße B_1 mißt:

$$B_1 = m \cdot v = \frac{G}{g} \cdot v = \frac{500 \cdot 15}{9{,}81} \text{ oder rund } \frac{500 \cdot 15}{10} = 750\,\mathrm{t\,sek},$$

$$B_2 = 0.$$

Nach Gl. 23b wird:

$$K = \frac{B_1 - B_2}{t} = \frac{750\,\mathrm{t \cdot sek}}{30\,\mathrm{sek}} \doteq 25\,\mathrm{t}^{1)} = 25000\,\mathrm{kg}.$$

---

[1]) Der Buchstabe t ist in dreifacher Bedeutung verwendet; hier t = Tonne = 1000 kg, anderen Orts steht t für Zeit oder für die Temperatur.

Diese Bremskraft ist für die Befestigung der Schienen auf den Schwellen und ihre Lagerung in der Unterbettung sowie für die Konstruktion von Eisenbahnbrücken von großer Bedeutung, ersteres insbesondere auf den Bahnhöfen mit elektrischem Schnellverkehr.

10. Der Druck eines Geschosses auf eine getroffene Panzerplatte.

Ein Geschoß von $G = 100$ kg Gewicht treffe mit $v = 400\,\text{m}\,\text{sek}^{-1}$ Geschwindigkeit auf eine Panzerplatte und gelange in $t = \frac{1}{500}$ Sek. durch deren Widerstand zur Ruhe. Wie groß war dabei im Mittel etwa die hemmende Kraft.

Es ist

$$B_1 = \frac{G}{g} \cdot v = \frac{100}{9{,}81} \cdot 400 \quad \text{oder rund} \quad \frac{100}{10} \cdot 400 = 4000\,\text{kg}\,.\,\text{sek};$$

da $B_2 = 0$, wird nach Gl. 23b, S. 34

$$K = \frac{B_1 - 0}{t} = \frac{4000\,\text{kg}\,.\,\text{sek}}{\frac{1}{500}\,\text{sek}} = 2\,000\,000\,\text{kg}.$$

11. Der Druck des Fallblockes (Rammbärs) auf einen Rammpfahl.

Der Bär von $P = 600$ kg Gewicht fällt aus $h = 3$ m Höhe auf den Pfahl. Bei den letzten Schlägen dringt der Pfahl noch je $e = 1{,}5$ cm in den Boden ein, wie durch Messung im Sonderfall festgestellt wurde. Es ist der mittlere Druck zu bestimmen, welchen der Bär dabei auf den Pfahl geäußert hat.

Nach der bekannten Fallformel erreichte der Bär die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 3} = 7{,}7\,\text{m}\,\text{sek}^{-1}$, sein Weg während der Zeit der Hemmung (d. h. des Stoßes) beträgt $e = 1{,}5$ cm $= 0{,}015$ m. Da die Geschwindigkeit anfänglich v, zum Schluß Null beträgt, mißt die mittlere Geschwindigkeit:

$$v_m = \frac{v}{2} = \frac{7{,}7}{2} = 3{,}85\,\text{m}\,\text{sek}^{-1};$$

und die Zeitdauer des Stoßes

$$t = \frac{e}{v_m} = \frac{0{,}015}{3{,}85}\,\text{sek} = 0{,}004\,\text{sek}.$$

Die Bewegungsgröße vor dem Stoß beträgt:

$$B_1 = m.v, \text{ darin } m = \frac{G}{g} = \frac{600 \text{ kg}}{9{,}81 \text{ m sek}^{-2}} \text{ und } v = 7{,}7 \text{ m sek}^{-1},$$

also
$$B_1 = \frac{600}{9{,}81} \cdot 7{,}7 = 471 \text{ kg sek.}$$

Die Bewegungsgröße nach dem Stoß ist $B_2 = 0$. Mithin wird nach Gl. 23b:

$$K = \frac{B_1 - B_2}{t} = \frac{(471 - 0) \text{ kg.sek}}{0{,}004 \text{ sek}} = \mathbf{118\,000\ kg.}$$

Unter der Wirkung dieser Kraft dringt der Pfahl in den Erdboden ein. Würde man den Pfahl am Nutzbau hernach ebenso stark belasten, dann wäre ein weiteres Einsinken des Pfahles die Folge. Man wird daher nur einen Teil dieser Kraft als erlaubte Pfahlbelastung zulassen dürfen. Genauere Untersuchungen ergeben, daß außer der Zeit, welche das Eindringen des Pfahles erfordert, vor Beginn desselben auch noch Zeit auf Zusammendrücken des Pfahles verwendet wird, so daß dadurch die Stoßzeit t etwas größer und K etwas kleiner ausfällt, als oben ermittelt ist. Es tritt noch der Umstand hinzu, daß auch die Schwingung des Erdbereichs, unter der Wucht des Schlages erfolgend, die Stoßzeit verlängert. Beides zusammen führt etwa zu einem Abzug von K um 30 v. H., so daß der Widerstand W des Pfahles im Boden etwa nur $W = 0{,}7\,K = 0{,}7 . 118\,000 = 82\,600$ kg beträgt. Rechnet man im Bauentwurf nun mit vierfacher Sicherheit, dann ist als Traglast T für einen solchen Pfahl zuzulassen:

$$T = \frac{1}{4} W = \frac{1}{4} \cdot 82\,600 \text{ kg} = \text{rund } 20\,t,$$

was dem Gebrauch der Baupraxis entspricht.

Zweite Ableitung, unter Zugrundelegung der aufgewendeten Energie.

Die Formel, welche die Größe der Pfahltragkraft T ermittelt, wird als Rammformel bezeichnet; bei ihrer Ableitung pflegt man im Gegensatz zu obiger Betrachtung von der aufgewendeten Energie des Fallbärs auszugehen, wobei die Umstände, welche zu Energieverlusten führen, noch beachtet und in Abzug gebracht werden. Dann verbleibt ein Energiebetrag E_1, welcher durch die Arbeit

des Widerstandes W im Boden, auf dem Wege e des Eindringens vom Pfahl wirkt, und der die widerstehende Arbeit $W.e$ leistet. Es wird dann

$$W.e = E_1,$$

$$W = \frac{E_1}{e},$$

$$T = \frac{1}{4}\frac{E_1}{e}.$$

Die voraufgegangene Ableitung führt zu demselben Ergebnis wie letztere.

Unter meinem Referate schrieb Herr Bauinspektor Dr.-Ing. Geiss aus Posen eine Doktor-Ingenieur-Dissertation, welche die Aufgabe behandelt hat, festzustellen, wie der Verlust an Energie, der durch das Zurückweichen des ganzen Erdbodens bei dessen Erschütterung entsteht, die Ergebnisse der Rammformel beeinflußt. Die Arbeit wird gestützt durch im kleinen ausgeführte Versuche. Nebenher ist dabei auch die Frage erörtert, wiewohl nicht mit ausreichenden Mitteln untersucht, ob auch das hier zwar nur zu geringem Betrage eintretende Zurückschnellen des Bärs nach aufwärts (siehe Fig. 15, S. 47, und Fig. 17, S. 48) zu einer Steigerung der Rammkraft führt. Bis zu geringem Betrage ist das der Fall, wenn der Widerstand des Pfahles im Boden recht groß zu werden beginnt und ein verstärkter Rückprall des Bärs, ein vermehrtes Emporschnellen desselben nach dem Stoß sich einstellt. In diesem Fall ist B_2 nach dem Stoß nicht gleich Null, sondern negativ, da Rückbewegung vorliegt. Es wird dann:

$$D = \frac{B_1 - (-B_2)}{t} = \frac{B_1 + B_2}{t},$$

mithin größer als K, größer als zuvor angenommen worden ist. Der Wert B_2 fällt aber nur klein aus.

Die praktische Beschäftigung mit den Stoßvorgängen zeigt in anschaulicher Weise, von wie verwickelter Art jene sind. Die ursprünglich vorhandene Energie spaltet sich dabei vielfach, ein Teil derselben erzeugt Schallwellen, ein anderer Bodenerzitterungen, ein Teil überwindet den Bodenwiderstand längs des Weges e, und ein Betrag verbleibt als innere Bewegung in den sich treffenden Körpern, diese erwärmend. Das zeigt sich zumal am Pfahlkopf in dessen Innerm, wo die durch wiederholten Schlag erzeugte

Wärme nicht so leicht zur Fortleitung gelangt wie an der Pfahloberfläche. Im Innern steigert sich daher die Temperatur, das Holz verkohlt, wird schwarz und der Pfahl beginnt zu rauchen. Auch schlagen wohl Flammen aus demselben hervor.

Vergleicht man diese Vorgänge mit den Darstellungen der Stoßvorgänge molekularer Bewegung in der kinetischen Wärmetheorie, dann drängt sich die Vorstellung auf, daß bei Behandlung letzterer den inneren Vorgängen im Molekül noch zu wenig Beachtung geschenkt worden ist. Manche Arbeiten lassen die innermolekularen Vorgänge und die innermolekulare Energie ganz unerwähnt, trotzdem letztere einen großen Betrag der ganzen molekularen Wärmeenergie bildet; siehe darüber Lieferung 2.

12. Das allgemeine Stoßgesetz.

Bei dem Austausch von Bewegungsgröße zwischen zwei Massen bleibt die Summe der Bewegungsgrößen unverändert. Stößt eine Masse m_1, deren Geschwindigkeit v_1 ist, auf eine Masse m_2, deren Geschwindigkeit v_2 beträgt, dann wird durch die zwischen beiden entstehende Spannkraft Bewegungsgröße von einer Masse auf die andere übergeleitet, wobei von der Bewegungsgröße im ganzen nichts vorloren geht.

Holt die Masse m_1 die Masse m_2 ein, auf sie stoßend, dann übt dieselbe auf m_2 die Stoßkraft K aus; sie empfindet ihrerseits dabei als Reaktion die widerstehende Kraft $-K$. Da nun während jedes einzelnen kleinen Zeitabschnittes dt die Größenwerte von K und $-K$ einander gleich sind, weil das für Aktion und Reaktion immer gilt, fallen auch die Werte $-K.dt$ und Kdt der Größe nach einander gleich aus; sie sind nur von entgegengesetztem Vorzeichen.

Fig. 19.

Die Einbuße an Bewegungsgröße beträgt für die Masse m_1 in der Zeit dt:

$$dB_1 = -Kdt,$$

und der Gewinn für m_2:

$$dB_2 = +K.dt$$

$$\mathbf{dB_1 + dB_2 = (-K + K).dt = 0.}$$

Durch den Stoß und bei demselben ändert sich die Summe der Bewegungsgrößen also niemals.

Das führt zu dem Gesetz:

Satz: Die Summe der Bewegungsgrößen bleibt im Weltall konstant.

Die mittlere Geschwindigkeit v_m der sich stoßenden Massen bleibt also während und nach dem Stoß unverändert, sie ermittelt sich aus der bekannten Gleichung, welche sowohl für den unelastischen wie für den elastischen Stoß gilt:

$$\sum B = B_1 + B_2,$$

$$(m_1 + m_2) . v_m = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

(Gl. 59) $$v_m = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Man könnte sich der Vorstellung hingeben, daß unter der Wirkung einer Kraft, z. B. bei dem Fall eines Körpers, Bewegungsgröße neu entstände, aber dem ist nicht so. Erstens fällt nicht nur der Körper der Erde entgegen, sondern diese auch auf jenen hin. Dabei ist die wirkende Kraft in beiden Richtungen von gleicher Größe, wie oben in Fig. 19 beim Stoß, und auch wieder von entgegengesetztem Vorzeichen, so daß an Bewegungsgröße einer Richtung der fallende kleine Körper so viel gewinnt, wie die Erde davon verliert. Ähnlich liegen die Verhältnisse bei Erscheinungen der Anziehung und Abstoßung elektrischer oder magnetischer Art.

Zweitens ist keine andere Annahme möglich als diese, daß auch das stoffliche Mittel, welches die fernwirkende Kraft überträgt, in unmittelbarer Berührung mit dem beeinflußten Körper zunächst selbst an Bewegungsgröße so viel verliert, wie der beeinflußte Körper gewinnt.

13. Mischungsvorgänge verschiedenartiger Stoffe, z. B. für die Gesamtheit der atmosphärischen Luft.

Bei Ableitung der Gleichung 59 ist keinerlei Voraussetzung darüber gemacht, ob die im Stoß sich begegnenden Massen fest, flüssig oder gasförmig sein sollen. Das Endergebnis ist dasselbe, ob feste Körper im Stoß sich treffen, Gase sich mischen oder Gase mit Flüssigkeiten das tun. Es ist im Maschinenbau bekannt und auch durch Laboratoriumsversuche erwiesen, daß z. B. bei der Mischung von Dampf und Wasser die sich ergebende Ge-

schwindigkeit v_m der Mischung nach Gl. 59 sich ermittelt. Das ist insbesondere bei Dampfstrahlapparaten, in welchen Dampf und Wasser sich mischen, festgestellt.

Man begegnet bisweilen der Anschauung, daß für elastischen Stoff bei Berechnung von v_m das Ergebnis der Mischung sich aus dem Gesetz über die Erhaltung der Energie ableiten lasse. Das aber ist ein Irrtum. Zwar bleibt bei den vielen kleinen Zusammenstößen, welche Mischungen im Gefolge haben, die Energie im ganzen erhalten, das aber nicht in der Form äußerer Bewegung, sondern in der Form äußerer und innerer Bewegung (innerer Zuckungen, Wellen, Schwingungen molekularer Bewegung, d. h. Wärmebewegung, Bewegungen elektrischer Art usw.). Wie groß sich die äußere Geschwindigkeit nach dem Zusammenstoß, hier nach erfolgter Mischung, gestaltet, läßt sich ausschließlich nur nach dem Gesetz über die Erhaltung der Bewegungsgröße, also nach Gleichung 59 ermitteln.

Der Geh. Regierungsrat Werner v. Siemens hat in seinem Vortrage über die Bewegungen der Erdatmosphäre, an der Akademie der Wissenschaften in Berlin gehalten [siehe deren Verhandlungen[1])], versucht, die mittlere Geschwindigkeit der Erdatmosphäre zu bestimmen und festzustellen, auf welchem Breitenkreise der Erde diese sich vorfinde. Dabei ging v. Siemens von der Voraussetzung aus, daß bei dieser Berechnung das Gesetz über die Erhaltung der Energie anzuwenden sei, während in Wirklichkeit die Ermittlung nach Gleichung 59 zu erfolgen hat. Siehe darüber meine Erörterungen[2]) aus einer nun schon 30 Jahre zurückliegenden Zeit.

Fig. 20.

Die Berechnung stellt sich nach Gl. 59 wie folgt:

$$d O = 2 \varrho \pi . r . d \varphi; \qquad \varrho = r . \cos \varphi,$$
$$d O = 2 r \cos \varphi . \pi . r . d \varphi = 2 r^2 \pi \cos \varphi \, d \varphi.$$

[1]) Werner v. Siemens, Über die Erhaltung der Kraft im Luftmeer der Erde. S.-A. aus dem Sitzungsbericht der Kgl. Preuß. Akademie der Wissenschaften, 1886, XIII (4. März).

[2]) Max Möller, Über Verluste an Energie bei der Bewegung der Luft, Meteorologische Zeitschrift, 4. Jahrg. 1887, S. 318. Diese meine Arbeiten finden sich auch erwähnt von Herrn Werner v. Siemens in seinem Buch: „Wissenschaftliche und technische Arbeiten“, Bd. II, 2. Aufl., S. 599. Verlag von Jul. Springer, Berlin, 1891.

Das Luftgewicht $O.p = M.g$, darin ist O die Oberfläche der Halbkugel, p der Druck auf die Flächeneinheit, M die Masse der die Fläche O überlagernden Luft und g die Beschleunigung der Schwere. Es ist p der atmosphärische Druck auf die Einheit der Erdoberfläche, also das Luftgewicht auf die Flächeneinheit, mithin wird:

$$M = O \cdot \frac{p}{g} \quad \text{und} \quad dM = d\,O \cdot \frac{p}{g}, \text{ also hier:}$$

$$dM = 2\,r^2 \pi \cos\varphi\, d\varphi \cdot \frac{p}{g} \cdot$$

Die Bewegungsgröße $dB = dM.v$; $v = \omega . \varrho = \omega . r . \cos\varphi$, ω ist hier die Winkelgeschwindigkeit.

Dies eingesetzt, ergibt für dB:

$$dB = 2\,r^2 \pi \cos\varphi . d\varphi \cdot \frac{p}{g}\, \omega\, r \cos\varphi$$

und

$$B = 2\,r^3\, \omega\, \pi \cdot \frac{p}{g} \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi.$$

Da O aber gleich $2\,r^2 . \pi$ ist, so mißt die Masse der Atmosphäre auf einer Halbkugel $M = 2\,r^2 \pi \cdot \frac{p}{g}$, und es wird $B = v_m \,.\, 2\,r^2 \pi \cdot \frac{p}{g}$, die beiden Werte für B einander gleich gesetzt, ergibt:

$$v_m \,.\, 2\,r^2 . \pi . \frac{p}{g} = 2\,r^3\, \omega . \pi \cdot \frac{p}{g} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi\,;$$

$$v_m = \frac{2\,r^3 . \omega . \pi \cdot \frac{p}{g} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi}{2\,r^2 \pi \cdot \frac{p}{g}}\,;$$

$$v_m = r\,\omega \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = r . \omega \cdot \frac{1}{2} \Big[\sin\varphi . \cos\varphi + \varphi \Big]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}\,;$$

$$v_m = r . \omega \cdot \frac{\pi}{4}\,;$$

v^m durch die geographische Breite φ_1 ausgedrückt, in welcher sich der Mittelwert v_m linearer Umdrehungsgeschwindigkeit für die Punkte der Erdoberfläche findet, wird:

$$v_m = r \,.\, \omega \,.\, \cos \varphi_1 = r \,.\, \omega \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{\pi}{4}; \quad \frac{\pi}{4} = 0{,}7854$$

$$\cos \varphi_1 = 0{,}7854$$

$$\varphi_1 = 38^0 15'.$$

Die mittlere lineare Umdrehungsgeschwindigkeit der Erdatmosphäre ergibt sich also bei einer geographischen Breite von $\varphi = 38^0 15'$. — Das ist von Bedeutung für das Auftreten der Gürtel höheren Luftdrucks in den sogenannten Rossbreiten der warmen Zone, sowohl auf der nördlichen wie südlichen Halbkugel auftretend; siehe darüber die Abhandlungen über den Kreislauf der atmosphärischen Luft (Fußnote S. 147).

14. Beziehung zwischen Wurfhöhe und Geschwindigkeit bei lotrechtem Aufstieg.

Bei fehlendem Widerstande steigt ein lotrecht mit der Geschwindigkeit $v = v_1$ emporgeworfener Körper bis zu der Höhe h auf, in welcher seine Bewegungsgröße durch Wirkung der Schwerkraft verzehrt ist. Dabei nimmt seine Geschwindigkeit linear bis auf Null ab; sie beträgt im Mittel $\frac{v}{2}$.

Fig. 21.

Nach Gl. 23b, S. 34 ist:

$$K = \frac{B_1 - B_2}{t}$$

oder

$$t = \frac{B_1 - B_2}{K}; \quad B_1 = m v_1 = \frac{G}{g} \cdot v_1,$$

und da $v_2 = 0$, ist $B_2 = m v_2 = 0$

$$t = \frac{\frac{G}{g} \cdot v_1 - 0}{K}$$

Die Kraft, welche an der Bewegungsgröße zehrt, ist hier das Gewicht des Körpers, $K = G$. Mithin wird:

(Gl. 60) $$t = \frac{\frac{G}{g} \cdot v_1}{G} = \frac{v_1}{g}.$$

Es wird ferner, da der Mittelwert von v ist $\frac{v_1 + 0}{2} = \frac{v_1}{2}$:

(Gl. 61) $$h = \frac{v_1}{2} \cdot t = \frac{v_1}{2} \cdot \frac{v_1}{g}$$
oder

(Gl. 61a) $$h = \frac{v_1^2}{2g}$$
und

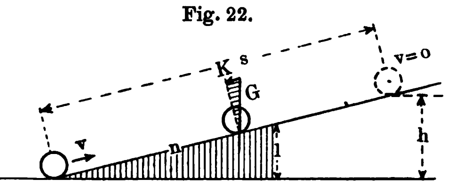
(Gl. 62) $$v_1 = \sqrt{2gh}.$$

Das ist die bekannte Wurfformel.

15. Anstieg auf geneigter Bahn.

Eine Kugel rollt an einer schiefen Ebene, deren Neigung $1:n$ beträgt (s. Fig. 22), ohne Reibungswiderstand aufwärts; ihre Anfangsgeschwindigkeit sei v.

Fig. 22.



Aus der Ähnlichkeit der hier schraffierten Dreiecke geht hervor, daß die verzögernde Kraft in diesem Falle $K = \frac{1}{n} G$ beträgt.

Das in die Gleichung $t = \frac{B_1 - B_2}{K}$ oder in Gl. 60, S. 60, dann aber im Nenner $\frac{1}{n} G$ statt G geschrieben, eingesetzt, gibt hier:

(Gl. 63) $$t = \frac{\frac{G}{g} \cdot v}{\frac{1}{n} G} = n \cdot \frac{v}{g}.$$

Die Zeit des Aufstieges, bis die Kugel die Ruhelage in der Höhe h erreicht, hat hier also auf das $n$fache gegenüber dem lotrechten Aufstieg zugenommen, so daß sich, da dem entgegen die Kraft auf $\frac{1}{n}$ herabgegangen ist, das Produkt aus Kraft mal Zeit nicht geändert hat. Der dabei zurückgelegte Weg s mißt nun:

(Gl. 64) $$s = \frac{1}{2} v t = \frac{1}{2} v . \frac{n . v}{g} = n \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Die erreichte Höhe h berechnet sich wieder zu (siehe Gl. 61a):

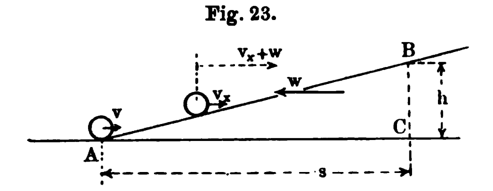
(Gl. 65) $h = \frac{1}{n} s = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}$ wie im Beispiel 14.

16. Beispiel aus dem Gebiete der relativen Bewegung, z. B. der Wellenbewegung.

Wieder Anstieg auf geneigter Ebene: diesmal aber einer Ebene, welche selbst Eigenbewegung auf den materiellen Punkt hin besitzt, wie das z. B. bei einer fortschreitenden Wasserwelle gegenüber den schwingenden Elementen des Wassers der Fall ist. Hierfür Ermittlung der Wellenhöhe h. — Während in Fig. 22 die schiefe Ebene in der Bildebene ruht, zeigt dieselbe in Fig. 23 dort eine Geschwindigkeit w.

Vorn an der schiefen Ebene in A besitzt das Massenteilchen (Kugel oder Wasserelement) in bezug auf die Bildebene die Geschwindigkeit $v_x = v$, aber in bezug auf die Ebene allgemein die relative Geschwindigkeit $v_x + w$. Es nähert sich das Teilchen also dem Punkte B mit dieser relativen Geschwindigkeit.

Fig. 23.



Es gilt nun festzustellen, in welcher Zeit, auf welcher Wegeslänge und in welcher Erhebung h (bei der Wasserwelle ist das die halbe Höhe der Welle) das Massenteilchen die absolute Geschwindigkeit $v_2 = 0$ angenommen hat.

Das Wesentliche, das Eigenartige des Vorganges besteht nun darin, daß in der Zeit, welche vergeht, bis das Teilchen, von der Anfangsgeschwindigkeit v ausgehend, die Ruhelage erreicht, es in jedem Zeitdifferential sich nicht nur, wie in Fig. 22, um den Betrag $dh_1 = \frac{1}{n} v_x dt$ hebt, sondern außerdem noch um den Betrag $dh_2 = \frac{1}{n} w\, dt$, indem sich die schiefe Ebene wie ein Keil unter das Teilchen schiebt, dieses um dh_2 empordrückend.

In bezug auf B besteht infolge der relativen Geschwindigkeit $(v_x + w)$ des Teilchens für dieses die Beziehung:

$$s = (v_x + w)\, t$$

und hier, wo v_x mit v beginnt und mit dem Werte 0 endet, im Mittel also $v_x = \frac{v}{2}$ ist:

$$s = \left(\frac{v}{2} + w\right) t.$$

Die Zeit t aber, bis v unter Wirkung der Kraft $\frac{1}{n} G$, hier $\frac{h}{s} G$, Null wird, ist nach Gl. 63 wieder $t = \frac{s}{h} \frac{v}{g}$.

$$s = \left(\frac{v}{2} + w\right) \cdot \frac{s}{h} \frac{v}{g}$$

(Gl. 66) $$h = \frac{v^2}{2g} + \frac{wv}{g}.$$

Beispiel 1. Auch für die fortschreitende Wasserwelle bestehen die vorstehend erörterten Beziehungen. Dort ist v die horizontale Komponente schwingender Geschwindigkeit des Wasserteilchens, w die fortschreitende Geschwindigkeit der Welle und h die halbe Wellenhöhe, und zwar hier vom Scheitel des Tales bis Wellenmitte. Siehe darüber Näheres in meinen Abhandlungen über die Wasserwelle[1]).

[1]) 1. M. Möller, „Ungleichförmige Wasserbewegung", Zeitschr. f. Arch. u. Ing., S. 581—608, Hannover 1894.

Die Abhandlung behandelt den ruhenden und den sich bewegenden Wassersprung, die Wasserschwelle, überhaupt die bei der neuerdings als schießend bezeichneten Bewegung des Wassers sich vollziehenden Vorgänge, wobei sich die Unebenheiten der Sohle am Wasserspiegel verstärkt bemerkbar machen, im Gegensatz zur ruhig fließenden Wasserbewegung, bei welcher letzteres nicht der Fall ist, sondern am Ort über einer Sohlenerhebung eine schwache Spiegelsenkung sich ausbildet.

2. M. Möller, „Ein Beitrag zur Berechnung der Wellen und der Flut- und Ebbebewegung des Wassers", Zeitschr. f. Arch. u. Ing., S. 475—508, Hannover 1896. Behandelt sind hier die Wellen mit zumal longitudinaler Schwingung unter Vernachlässigung der in einer gleichzeitig auftretenden schwachen Vertikalschwingung enthaltenen Energiemengen; sind diese doch bei den Wellen der Ebbe und Flut äußerst gering. Ferner ist daselbst die Ableitung der Geschwindigkeit fortschreitender Bewegung der Wasserwelle (dort v genannt) für das Kanaltrapezprofil mit Anwendung auf den Nordostseekanal ermittelt. In einem besonderen Abschnitt sind die Umgestaltung der Welle bei ihrem Eindringen in trichterförmige Flußmündungen und der Vorgang der Brandung behandelt. Im Gegensatz zu der in dieser Schrift gewählten Bezeichnungsweise ist die Geschwindigkeit des Wasserelementes anstatt v in jenen älteren Arbeiten u genannt.

Ausgewertet sind jene von mir aufgestellten mathematisch-physikalischen Beziehungen, welche für die Umgestaltung langgestreckter Wasserwellen bei Übergang auf kleinere Gewässerquerschnitte gelten, in der Dr.-Ing.-Arbeit von Herrn Regierungs- und Baurat Pfeiffer, Husum, im Jahre 1920; sie betrifft die Änderung der Sturmfluthöhe an der Küste, bedingt durch eine Erbauung des schon begonnenen, bis 1926 zu vollendenden Eisenbahndammes durch das Wattenmeer, vom Festlande nach der Insel Sylt führend. Jene Abhandlung hat mir zum Referat vorgelegen. Abschrift derselben befindet sich in der Bibliothek der Technischen Hochschule in Braunschweig.

3. Siehe auch die Fußnote S. 2 (Die vom Winde erzeugten Wellen).

Selbst bei kleinen Werten v erreicht die Wellenhöhe h oft schon große Beträge. Eine durch stürmischen Wind erzeugte Wasserwoge erreicht bei $v = 1$ m sek^{-1} horizontal schwingender Geschwindigkeit des Elementes (im Wellental bei A gemessen) und bei einer Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit von $w = 15$ m sek^{-1} in mittlerer Höhe des Wasserspiegels, dem Wendepunkt zwischen Tal und Berg, die Höhe:

$$h = \frac{1^2}{2 \cdot 9{,}81} + \frac{15 \cdot 1}{9{,}81} = 0{,}05 + 1{,}53 = 1{,}58 \text{ m}$$

oder, zwischen den Scheiteln von Tal und Berg gemessen, $2 \cdot 1{,}58 = 3{,}16$ m.

Die Welle der Ebbe- und Flutbewegung, welche in tiefer See $w = 200$ m sek^{-1} Geschwindigkeit besitzt, erreicht bei $v = 0{,}03$ m sek^{-1} horizontal schwingender Geschwindigkeit der Wasserelemente, d. h. der Flutströmung, schon eine Höhe von:

$$h = \frac{0{,}03^2}{2 \cdot 9{,}81} + \frac{200 \cdot 0{,}03}{9{,}81} = 0{,}000\,045 + 0{,}61 = 0{,}61 \text{ m.}$$

Der Unterschied zwischen der Höhe von Wellenberg und Tal beträgt dann also 1,22 m.

Ohne das Vorhandensein fortschreitender Bewegung der Welle (siehe die schiefe Ebene, Fig. 23) würde in vorstehenden Beispielen das Teilchen jeweils nur diejenige Höhe, welche das erste Glied der Gleichung ergibt, erreichen, also im Beispiel 1 nur 0,05 m und im Beispiel 2 nur 0,000 045 m. Es liegt dann der Fall Fig. 22 vor.

Je größer also der Unterschied in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit w der Welle und der Geschwindigkeit v schwingender Bewegung der Elemente wird, desto mehr tritt die Bedeutung des ersten Gliedes der Gl. 66 gegenüber dem zweiten Gliede zurück. Für $w = 0$ geht schließlich Gl. 66 in die Gl. 65 über.

Was hier von den Teilen an der Oberfläche gesagt ist, gilt auch für die Wasserelemente im Innern des Wassers. Dort tritt nur an die Stelle der geneigten Ebene der Wasseroberfläche diejenige der Fläche gleichen Drucks.

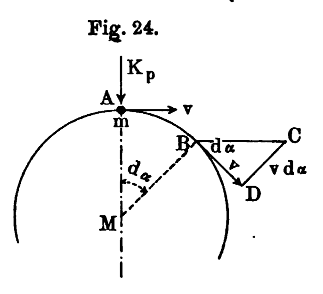
V. Die Zentrifugalkraft und ihre Wirkungen.

A. Allgemeines.

1. Das Wesen der Zentrifugalkraft.

Unter dem Zwange einer Zentripetalkraft K_p, welche auf den Mittelpunkt M des Bahnkrümmungskreises vom Radius r hinweist, bewegt sich die Masse m von A bis B. Der Winkel AMB sei unendlich klein gedacht. In B angelangt, besitzt das materielle Teilchen die Bewegungsrichtung BD. Es liegen die Verhältnisse so, wie wenn es außer einer Bewegung in Richtung BC noch eine Bewegung CD von der Geschwindigkeit $v d\alpha$ besäße, welche es unter Wirkung der Zentripetalkraft in der Zeit dt erlangt hat. Es wird nun nach Gl. 27:

Fig. 24.



$$K_p = \frac{m\,dv}{dt} = \frac{m v\,d\alpha}{dt}.$$

Darin ermittelt sich dt aus der Beziehung:

$$\text{Weg } AB = r\,d\alpha = v\,dt \text{ und } dt = \frac{r\,d\alpha}{v};$$

das eingesetzt, ergibt:

$$\text{(Gl. 67)} \qquad K_p = m v\,d\alpha \cdot \frac{v}{r\,d\alpha} = m\frac{v^2}{r} \quad \text{(Zentripetalkraft).}$$

Da die Zentrifugalkraft als Reaktion der Zentripetalkraft dieser der Größe nach gleich ist, wird auch:

$$\text{(Gl. 68)} \qquad K_f = m\frac{v^2}{r} \quad \text{(Zentrifugalkraft).}$$

Die Richtung der Zentrifugalkraft ist dabei derjenigen der Zentripetalkraft entgegengesetzt, also vom Mittelpunkt M wegweisend.

Man kann auch schreiben $v = r\omega$ (ω Winkelgeschwindigkeit) und

$$\text{(Gl. 67a u. 68a)} \qquad K_p = K_f = m\omega^2 r.$$

Die Zentrifugalkraft ist die Ergänzungskraft der Bewegung von Masse auf gekrümmter Bahn; es ist die Kraft, mit welcher die Masse, nach außen drängend, bestrebt ist, die gekrümmte Bahn zu verlassen und ihren Weg geradeaus fortzusetzen; unter ihrer Wirkung vollzieht sich die Ausbildung der trichterförmigen Gestalt von Wirbeln; sie hält die Gestirne in ihrem gegebenen Abstande, auch ist die Erdabplattung durch sie bedingt. Die Ausbildung der großen atmosphärischen Gebilde der Depressionen und Hochgebiete ist durch die Zentrifugalkraft beeinflußt. Die Wirbelbildung ist von mir im Jahre 1907 eingehender behandelt[1]).

2. Auswertung der Zentrifugalkraft in der Technik.

Die Zentrifugalkraft findet mehrfache Auswertung in der Technik; sie wird in den Zentrifugen benutzt, um schwereren von leichterem Stoff zu scheiden, z. B. die Sahne von der Milch; sie bewirkt in kurzer Zeit das, was die Schwere nur langsam erreicht. Der schwerere, der dichtere Stoff lagert sich dort, wohin die Zentrifugalkraft weist, er wandert nach außen. Der leichtere Stoff sammelt sich im Umkreis der Mitte.

Auch zu Zwecken des Filterbetriebes, z. B. zur Entfernung des Rübensaftes der Melasse aus dem mit Zuckerkristallen erfüllten Gemisch bedient man sich der Schleuderapparate, sowie zur Trennung von Wasser und Nutzstoff, welch letzterer durch ein Sieb oder den Filterstoff zurückgehalten wird.

Auch die Eisenbetonmasten von Starkstromleitungen werden nach dem besonderen Verfahren der Firma Dyckerhoff & Widmann mittels Schleudervorganges hergestellt, wobei die breiartige Betonmasse sich an die innere Wand der um ihre Achse kreisenden Hohlform drängt, sich in gleicher Wanddicke ausbreitet und dicht ablagert, während das überschüssige Wasser zum Abfluß gelangt.

Andere Anwendungen finden wir bei den Regulatoren, welche den Dampfzutritt zur Maschine begrenzen, wenn die erstrebte Geschwindigkeit derselben erreicht ist. Auch Geschwindigkeitsmesser beruhen auf Zentrifugalwirkungen.

---

[1]) „Zur Theorie der Bewegungsvorgänge“, von Max Möller, Professor . . ., Zeitschrift „Die Turbine“, Organ der Turbinentechn. Gesellsch. Berlin, Jahrg. 1907. Sonderabdruck: Verlag von S. Hirzel, Leipzig. 21 Abb., 86 Seiten. Abschnitt D: „Der Wirbel“, S. 55 bis 86.

Ganz besonders hervorzuheben ist die Zentrifugalpumpe, benutzt für Zwecke der Wasserhebung oder der Hebung und Förderung von Erdboden nach erfolgter Mischung mit Wasser, in den Betrieben der Saugebagger ausgewertet, usw.

Die Frage, wie die Zentrifugalkraft von Luftmassen, welche mit großer Westwindgeschwindigkeit begabt, aus großen Höhen herabsinken, die Vorgänge der Atmosphäre und damit die Gestaltung der Witterung beeinflußt, beschäftigt mich seit 35 Jahren; siehe meine Arbeit über den Kreislauf der atmosphärischen Luft, hier Fußnote S. 147. Eine besondere Veröffentlichung ist darüber für später geplant.

3. Die Zentrifugalkraft und die Kolkbildung in Flüssen.

Im Wasserbau gibt es an Flußläufen die nachteilige Wirkung der Zentrifugalkraft zu bekämpfen, welche darin besteht, daß infolge des Gliedes v^2 im mathematischen Ausdruck derselben der am schnellsten bewegte Stoff am stärksten nach außen drängt. Das sind am Flußlauf die auf gerader Strecke in dessen Mitte nahe der Wasseroberfläche am schnellsten fließenden Wassermassen; diese drängen beim Eintritt in Stromkrümmungen gegen das hohle Ufer, Uferangriff hervorrufend; sie werden dort zum Abwärtssinken gezwungen und erzeugen daher nahe dem hohlen Ufer auch Auskolkungen an der Sohle; siehe darüber meine Ausführungen im Wasserbau II[1]).

4. Die Zentrifugalkraft in ihren astronomischen und geophysikalischen Beziehungen.

Von welcher Bedeutung die Zentrifugalkraft für die Bewegung der Gestirne, für die Gestaltung der Erde und für die Vorgänge in der atmosphärischen Luft, ihren Wirbeln, den Depressionen oder Zyklonen und Antizyklonen ist, lehren uns die Physik und die Meteorologie. Siehe hier auch nachstehend den Abschnitt V, B, Das Gesetz der Flächen und seine Anwendungen.

---

[1]) Max Möller, Grundriß des Wasserbaues, Bd. II, S. 132. Verlag von S. Hirzel, Leipzig, und die Dr.-Ing.-Dissertation, Beitrag zur Wirbelbewegung, von Dr. Hartmann, Techn. Hochschule Braunschweig, 1902.

5. Die Zentrifugalkraft und die Änderung der Bewegungsgröße.

a) Strahlablenkung um 90° (Fig. 25).

Die Zentrifugalkraft K_r zerfällt in die Komponenten K und R (vergl. auch Fig. 12, Beispiel 3, S. 44); von diesen ist K „die Aktion", bedingt durch die Verzögerung des Wasserstrahles in Richtung AB, und R „die Reaktion" durch Beschleunigung des in Richtung BC bei C austretenden Strahles.

Fig. 25.

Das schraffiert angedeutete Wasser (Fig. 25) vom Inhalt $J = f.dl = f.r.d\alpha$ besitzt an Masse $dm = \frac{\gamma}{g} J = \frac{\gamma}{g} \cdot f \cdot r \cdot d\alpha$. Die Zentrifugalkraft dieses Massenelementes ist:

$$d\,(K_r) = \frac{dmv^2}{r} = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{f.r.d\alpha.v^2}{r} = \frac{\gamma}{g} \cdot f \cdot v^2 \cdot d\alpha,$$

die Projektion von K_r auf Richtung AB ist $K = K_r \sin\alpha$ und daher:

$$d\,(K) = d\,(K_r) . \sin\alpha = \frac{\gamma}{g} \cdot f \cdot v^2 \sin\alpha\, d\alpha,$$

$$K = \frac{\gamma}{g} \cdot f \cdot v^2 \cdot \int_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha} \sin\alpha \cdot d\alpha = \frac{\gamma}{g} \cdot f \cdot v^2 \Big|_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha} - \cos\alpha.$$

Für die volle Wendung um $\alpha = 90^0$ erhält man

$$K = -\frac{\gamma}{g} \cdot f \cdot v^2 (\cos 90^0 - \cos 0^0)$$

$$= -\frac{\gamma}{g} \cdot f \cdot v^2 \cdot (0 - 1),$$

(Gl. 69) $$K = \frac{\gamma}{g} \cdot f \cdot v^2$$

vgl. Gl. 49, Beispiel 1, S. 42.

Ein Wert gleicher Größe ergibt sich mithin auch für R; es wird:

$$R = \frac{\gamma}{g} \cdot f \cdot v^2 \int_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha} \cos\alpha \cdot d\alpha = \frac{\gamma}{g} \cdot f \cdot v^2 \Big|_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha} \sin\alpha$$

$$R = \frac{\gamma}{g} \cdot f \cdot v^2 \cdot (\sin 90^0 - \sin 0^0) \text{ für } \alpha = 0^0 \text{ bis } 90^0,$$

(Gl. 69a) $$R = \frac{\gamma}{g} \cdot f \cdot v^2.$$

b) Strahlablenkung um 180° (vgl. auch Fig. 15, Beispiel 5, S. 47).

Es ergibt sich naturgemäß der doppelte Wert:

$$P = K + R = 2\frac{\gamma}{g} \cdot f \cdot v^2.$$

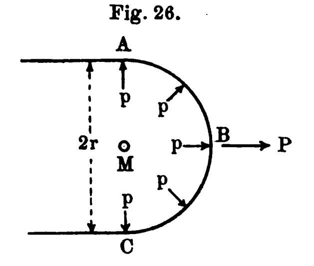
Man kann auch in diesem Falle wie folgt schließen (vgl. Fig. 26; darin ist Linie ABC die in Fig. 25 gestrichelt gezeichnete Mittellinie des Rohres): Der Druck auf die Längeneinheit des Halbkreises ermittelt sich zu:

$$p = \frac{m \cdot v^2}{r},$$

darin ist $m = \frac{\gamma}{g} \cdot f \cdot 1$ (für die Längeneinheit; siehe Fig. 25).

$$p = \frac{\gamma}{g} \cdot f \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Fig. 26.



Bekanntlich ist nun die Summe der Projektionen von $p \cdot dl$ auf die Normale MB zum Durchmesser AC:

$$P = 2rp,$$

darin p eingesetzt, gibt:

$$P = 2r\frac{\gamma}{g} \cdot f \cdot \frac{v^2}{r},$$

(Gl. 70) $$P = 2\frac{\gamma}{g} \cdot f \cdot v^2.$$

6. Die Zentrifugalkraft und das Raumbedürfnis der Masse bei gegebenem äußeren Druck.

Gegeben ist der Druck einer Atmosphäre $p = 10333 \text{ kg m}^{-2}$, mit welchem die umgebende Masse des äußeren Raumes in einen Kugelraum eindringen will; sie sei daran durch die in dem

Kugelraum in schnellem zeitlichen Wechsel nach allen Raumrichtungen kreisende Masse gehindert, deren Raumeinheitsgewicht demjenigen der atmosphärischen Luft bei 1 Atm. Pressung und 0° C Temperatur entspreche, mithin 1,293 kg m^{-3} betragen soll. Es ist die der Masse m zu gebende Geschwindigkeit v zu ermitteln, deren es für sie bedarf, um jenem äußeren Druck einer Atmosphäre zu widerstehen.

Der Rauminhalt der Kugel beträgt:

$$J = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

Die kreisende Masse mißt:

$$m = \frac{\gamma}{g} \cdot J = \frac{4}{3} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Der äußere Druck auf die Kugeloberfläche berechnet sich zu

$$P = O \cdot p = 4 r^2 \pi \cdot p.$$

Die Zentrifugalkraft K_f der Masse m soll diesen Gesamtdruck im zeitlichen Mittel das Gleichgewicht halten, wobei gedacht ist, daß die Masse m in kürzester Folge nacheinander auf alle Teile der Kugeloberfläche von innen her wirkt. Man kann die Masse m auch verteilt annehmen. Es wird:

Fig. 27.

$$K_f = \frac{m \cdot v^2}{r} = P; \quad \frac{m v^2}{r} = 4 r^2 \pi \cdot p,$$

für m den obigen Wert eingesetzt:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot r^3 \pi \cdot \frac{v^2}{r} = 4 r^2 \pi \cdot p$$

(Gl. 71) $$v = \sqrt{\frac{g}{\gamma} \cdot 3 p};$$

für $p = 10\,333$ kg m^{-2}, $g = 9{,}81$ m sek^{-2}, $\gamma = 1{,}293$ kg m^{-3} gesetzt, gibt:

$$v = \sqrt{\frac{9{,}81 \text{ m} \cdot \text{sek}^{-2}}{1{,}293 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}} \cdot 3 \cdot 10\,333 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}}$$

$$v = \sqrt{\frac{9{,}81}{1{,}293} \cdot 3 \cdot 10\,333} \quad \text{m} \cdot \text{sek}^{-1},$$

(Gl. 71 a) $$v = 485 \text{ m} \cdot \text{sek}^{-1},$$

vergleiche das Ergebnis Abschnitt IV, Beispiel 7, S. 50, dort v_1 genannt.

Die also berechnete Geschwindigkeit entspricht wieder der äußeren molekularen Wärmebewegung der Luft bei 0° C. Die Geschwindigkeit ist von der Größe des Luftdruckes unabhängig, da bei gleichbleibender Temperatur das Einheitsgewicht der Luft γ linear mit dem Luftdruck p wächst.

Es ist das Verhältnis

$$\text{(Gl. 72)} \qquad \frac{p}{\gamma} = \frac{10333\,\text{kg}\,\text{m}^{-2}}{1{,}293\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}} = 7991\,\text{m}$$

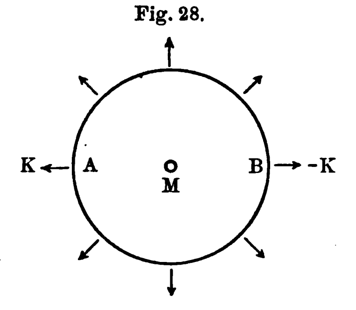
ein für atmosphärische Luft von 0° Temperatur unveränderlicher Wert, welcher in der mechanischen Wärmetheorie eine besondere Rolle spielt; siehe darüber Lieferung 2. Ferner ist diese Größe auch für die langgestreckten Oberflächenwellen der atmosphärischen Flut- und Ebbebewegung von Bedeutung.

Für feste Körper und Flüssigkeiten ist $\frac{p}{\gamma} = h$, d. h. gleich der „Druckhöhe"; davon handelt nachstehender Abschnitt VI. Für die atmosphärische Luft ist $h = \frac{p}{\gamma}$ nicht die wirkliche, sondern die ideelle Druckhöhe, die Druckhöhe, welche sich einstellen würde, wenn das Gewicht der Raumeinheit Luft nicht mit der Höhe abnähme.

7. Die Zentrifugalkraft als statische Kraft bei Rotationen.

Eine Scheibe dreht sich genau um ihren Schwerpunkt, so daß die bei A und B einander gegenüber auftretenden Zentrifugalkräfte K und $(-K)$ der Größe nach gleich sind und sich in ihrer Wirkung nach außen gegenseitig aufheben; sie erzeugen aber Zugspannungen in Richtung des Scheibendurchmessers und, da unter deren Wirkung die Scheibe sich ausdehnt, auch Zugringspannungen in derselben. Die großen Schwungräder stehender Dampfmaschinen sind insbesondere so zu bauen, daß sie diese Spannkräfte auszuhalten vermögen. Vor gut 40 Jahren hatte ich an dem alten Walzwerk der Gutehoffnungshütte in Oberhausen a. d. Ruhr Gelegenheit, die Zerstörungen zu sehen, welche ein unter der Wirkung der Zentri-

Fig. 28.



fugalkräfte auseinander gerissenes, gleichsam explodiertes Schwungrad angerichtet hatte. Einzelne Stücke desselben waren durch das Gebäudedach bis 40 m weit aufs Feld geflogen.

Am rotierenden Körper aus gesundem Material sind die Kräfte K und $(-K)$ durch die Materialfestigkeit vereinigt; sie bilden zusammen dabei Zugspannung. Bei genauer Zentrierung heben sich die Kräfte im Körper selbst auf, so daß sie nach außen hin zusammen keine Wirkung besitzen. Alsdann liegt für die Gesamtheit der Zentrifugalkräfte ein statischer Zustand vor.

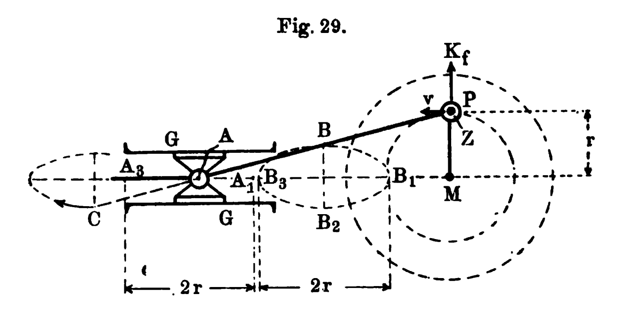
Die größte mir bekannt gewordene Umdrehungszahl einer Dampfturbine nebst Dynamo beträgt 75 Umdrehungen in einer Sekunde, was in den Drehkörpern sehr bedeutende Materialspannungen hervorruft.

8. Die Zentrifugalkraft als fernwirkende Kraft, auftretend bei der Drehschwingung (Revolution).

a) Die äußere Drehschwingung einer Einzelmasse bei zugfester Verbindung derselben mit dem Drehungs- oder Revolutionsmittelpunkt.

Die Zentrifugalkraft K_f tritt hier einseitig auf (siehe Fig. 29); sie wechselt beständig ihre Richtung, indem der materielle Punkt P im Kreise um M sich dreht und dort am Lager Zugwirkung

Fig. 29.



äußert. Am Kurbelmechanismus (Fig. 29) vollführt jeder Punkt der Pleuelstange, der Schubstange AP, eine Drehschwingung. Dabei vollführt P eine Kreisbahn, A eine lineare Bahn, zwischen den Grenzen A_1 und A_3 sich bewegend, und jeder andere Punkt, z. B. B, eine Ellipse, siehe die Bahn B, B_1, B_2, B_3. (Siehe auch den Schlußsatz zu Fig. 31.)

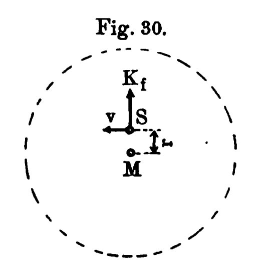
Die Fliehkraft wird durch die Kurbel PM zunächst nach dem Drehmittelpunkt M übertragen, wird hier durch das Lager auf das Maschinenfundament und von diesem auf den Erdboden übergeleitet, in dem sich nun ein Kraftdrehfeld bildet, in welchem sich die Bewegungen nach den Gesetzen der Wellenbewegung ausbreiten, alles ringsum in Drehschwingung versetzend.

Die Eigenart des Kurbelmechanismus besteht darin, daß er eine Drehung (eine Rotation) in eine Drehschwingung (eine Revolution) überführt. Es geschieht das bei P (Fig. 29), wo sich der Zapfen Z des Kurbelarmes PM im Lager des Pleuelstangenendes dreht, ohne seine Drehung um sich selbst auf die Pleuelstange zu übertragen, so daß deren Endteil P nur die Drehung um M, nun in Form von Drehschwingung, mitmacht.

Der andere Mechanismus, welcher gleiches bewirkt, ist als Exzenter bekannt; an ihm gleitet der Exzenterring auf der Exzenterscheibe.

Die Drehschwingung ist zusammengesetzt aus zwei Schwingungen, welche ein materieller Punkt in zwei normal zueinander stehenden Richtungsebenen vollführt, und welche in der Periode der Bewegung so versetzt sind, daß eine Kurve als Bewegungsbahn entsteht, und zwar in Fig. 29 ein Kreis, wenn die Schwingungsamplituden gleich groß sind, eine Ellipse für Punkt B, wo die Schwingungsausschläge verschieden groß sind, und eine gerade Linie bei A, wo die Schwingung, von im Bilde vertikaler Erstreckung, verschwindet, da Punkt A durch den Kreuzkopf und die Gleitbahnen G linear horizontal geführt ist.

Fig. 30.



Die Drehschwingung tritt meistens in Verbindung mit Rotationen auf, so z. B. an einem exzentrisch gelagerten Körper, der Scheibe (Fig. 30); dieselbe rotiert um M, sie sei aber auf einer Hälfte schwerer als auf der anderen, so daß ihr Schwerpunkt S zu M exzentrisch liegt. Alsdann vollführt derselbe eine Drehschwingung um M, deren Radius r dem Abstande von S und M entspricht. Siehe dazu die Betrachtungen und Berechnungen nachfolgend unter b).

Die Drehschwingung hat hervorragende physikalische Eigenschaften; da bei ihr die Drehung des Körperteiles um sich

selbst fehlt, fällt für sie die gleitende Reibung benachbarter Teile fort, welche bei Berührung zweier Wirbel auftritt. Die Drehschwingung ist wie jede Schwingung geeignet, Bewegung und daher Kräfte in die Ferne zu leiten. Lieferung 2 wird zeigen, daß Drehschwingungen, von Kreisleitern ausgehend, zur Entstehung abstoßender und anziehender Kräfte führen, deren mechanische Gesetze denen des Magnetismus entsprechen. Drehschwingungen mit ganz verschiedenen Drehmittelpunkten treten in ein und demselben Körper auf, ja es können im gleichen Körper Drehschwingungen von entgegengesetztem Drehsinn vorkommen. Das ist z. B. für das Stück einer Verlängerung der Pleuelstange (Fig. 29) über A hinaus der Fall; ein solcher Punkt C vollführt Drehschwingung im Sinn des Zeigers der Uhr, wenn das andere Ende bei B entgegen dem Uhrzeiger sich dreht.

Die Drehschwingungen treten immer paarweise auf. Vollführt ein Körper A, z. B. der Mond, eine Drehschwingung infolge einer vom Körper B (hier z. B. der Erde) ausgehenden Kraft, dann beschreibt auch B eine Drehschwingung. Dabei verhalten sich bei den Himmelskörpern die Durchmesser der Schwingungskreise umgekehrt wie die Größen ihrer Massen. Der Schwingungsmittelpunkt der Schwerpunkte von Erde und Mond liegt noch im Innern der Erde, in einem Abstande vom Erdmittelpunkt gleich einem Achtzigstel der Entfernung des Mondes von der Erde. Kreist der Mond in runder Zahl genommen mit 1020 m sek^{-1} Geschwindigkeit um diesen Drehschwingungsmittelpunkt, dann tut das die Erde mit $\frac{1020}{80} = 12{,}65$ m sek^{-1} Geschwindigkeit.

Sondereigenschaft der reinen Drehschwingung. Wo Rotation gänzlich fehlt, also reine Drehschwingung vorliegt, bleibt der Körper im Raume seiner Lage nach so orientiert, daß nur Parallelverschiebungen seiner Teile statthaben; eine auf ihm gezeichnete Linie, die nach einem bestimmten Fixstern zeigt, tut das dauernd. Bei reiner Drehschwingung oder Revolution bewegen sich alle seine Teile in parallelen Richtungen und mit gleicher Geschwindigkeit v. Die Größe der momentanen Schwingungsradien r ist für alle Teile des Körpers die nämliche (siehe Fig. 31), aber die Drehschwingungs-Mittelpunkte sind nicht die gleichen.

Schwingt der Schwerpunkt S um den momentanen Drehungsmittelpunkt M, dann tut das Punkt a um M_a, b um M_b usw.,

so daß die Drehschwingungs-Mittelpunkte M_a, M_b ... M_d in jedem Augenblick ein kongruentes Bild des Körpers *abcd* abgeben.

Bemerkt sei noch, daß in Fig. 29 der Körperteil B der Pleuelstange keine reine Drehschwingung vollführt, da die Linie ABP ihre Richtung im Raume ändert. Es liegt da eine Drehschwingung in Verbindung mit einer Drehschwankung vor.

Fig. 31.

b) Nachteilige Folgeerscheinungen der Drehschwingungen und Abwehrmittel dagegen.

Die Übertragung der Drehschwingungen sowie auch anderer Schwingungen bewegter Massen auf die Fundamente und auf das Maschinengebäude sucht man durch geeignete Maßnahmen zu vermindern, weil anderenfalls Schäden entstehen. Man bemüht sich im Maschinenbau, die bewegten Massen so auszugleichen, z. B. Gegenmassen derart anzubringen, daß deren Trägheitskräfte einseitig wirkenden Zentrifugalkräften K tunlichst entgegen wirken. Das glückt aber nicht vollkommen. Auf minderwertigem Baugrunde können dann Schwingungen entstehen, welche Nachteile im Gefolge haben. Es ist mir ein Fall bekannt, wo unweit der Stadt „im Haag“ (Holland) die Schwingungen der Maschinen einer Pumpanlage sich im Erdboden bis zu einem in leichter Bauweise ausgeführten alten Gebäude der Nachbarschaft fortpflanzten, so daß dieses darunter litt, baufällig wurde und abgebrochen werden mußte. Das Gebäude des Elektrizitätswerkes in Braunschweig in der Wilhelmstraße, durch Pfähle auf einem in den oberen Schichten minderwertigen Boden gegründet, geriet derartig in Schwingungen, daß es durch Strebepfeileranbauten verstärkt werden mußte. Ich war beratend bei Ausführung dieser Verstärkungsarbeiten hinzugezogen. Durch Anwendung von nicht nur lotrechten, sondern hinreichend schräg gestellten Rammpfählen im Fundament hätte man bei dem Bau des Gebäudes jenem nachteiligen Einfluß von vornherein besser entgegenwirken können.

Um die Schwingungen derartiger Maschinenfundamente von dem Gebäude selbst tunlichst fernzuhalten, pflegt man die Gründung

der Maschinen von der Gründung des Gebäudes getrennt zu halten sowie zwischen dem Fußbodenbelag des Maschinenraumes und den Umfassungswänden des Gebäudes eine Trennungsfuge zu lassen. Das war auch an dem genannten Elektrizitätswerke geschehen. Der Untergrund selbst hatte dort aber die Übertragung bewirkt.

In Mühlen erfolgt das Sichten des Mehles oft durch horizontale Plansichter, die wie große Tische aussehen und Drehschwingung (Revolution) vollführen. Hier sucht man die Fernwirkung auf das Gebäude dadurch zu mindern, daß man der einen Hälfte der Tische Drehschwingung rechts herum, der anderen Hälfte links herum erteilt. Dabei findet für das Gebäude eine Aufhebung der Drehschwingungen statt. Es verbleiben dann aber noch Längsschwingungen. Es kommt zudem in Frage, für alle Plansichter denselben Drehsinn zu wählen, die Periode ihrer Bewegung aber um 180° gegeneinander zu verschieben oder so zu teilen, daß zwar die eine Hälfte der Tische Drehschwingung in dem einen, die andere im entgegengesetzten Sinne vollführt, außerdem aber jede Gruppe nochmals zu teilen, indem man die Bewegungsperiode der Unterabteilungen um 180° gegeneinander versetzt.

Wiederholt bin ich gutachtlich zur Beurteilung von Dampfturbinenfundamenten elektrischer Zentralen hinzugezogen. Nach mehrjährigem Betrieb hatten sich in einem Falle die Bauteile der Fundamente gelockert, Risse waren entstanden, und die Erzitterungen nahmen fortgesetzt so zu, daß die Ziegelsteinverblendungen schon abbröckelten. Das Wasser in einem auf das Fundament gestellten Eimer geriet in so heftig zitternde Bewegung, daß es gleichsam zu kochen schien, und daß beständig Wassertropfen aus demselben emporsprangen. Die Berechnungen ergaben, daß bei dem Gewicht des Turbinenlaufrades von 3100 kg sich bei nur $r = 0{,}2$ mm Exzentrizität (siehe Fig. 30) eine Zentrifugalkraft $K = 6200$ kg entwickelte, welche das Fundament wechselweise nach oben und unten (was weniger von Nachteil war), aber auch wechselweise in horizontaler Richtung, und zwar quer zur Längenerstreckung desselben, hin und her zerrte. Bei Auftragerteilung für Entwurf und Herstellung der Fundamente hatten weder der Bauherr noch die Maschinenfabrik darauf hingewiesen, daß große Horizontalkräfte durch die Turbine hervorgerufen werden könnten; es waren der beauftragten Unternehmerfirma nur die lotrecht

wirkenden Lasten genannt. Zunächst wurde durch geeignete Schrägverstrebungen in Holz die nachteilige Wirkung der Horizontalschwingungen beseitigt, um dann später zu geeigneter Zeit bei ruhendem Betrieb die endgültige Verstärkung zu bewirken.

Berechnung der Zentrifugalkraft bei $r = 0{,}2$ mm exzentrischer Drehung einer Scheibe von 3100 kg Gewicht und 50 Touren in der Sekunde.

Die Zentrifugalkraft $K_f = \frac{m \cdot v^2}{r}$ (siehe Gl. 68, S. 65).

Die Masse $m = \frac{3100}{9{,}81} =$ rund 310.

Die Geschwindigkeit $v = \frac{n \cdot 2 r \pi}{t}$,

wobei $n = 3000$ Umdrehungen in der Minute, oder für $t = 1$ sek, $n = 50$ Umdrehungen.

$$v = 50 \cdot 2 r \pi = 100 r \pi$$

$$K = \frac{m \cdot 100^2 \cdot r^2 \cdot \pi^2}{r},$$

wobei $\pi^2 = 10$ gesetzt sei.

$$K = 100000 \cdot m \cdot r \qquad \left(r = 0{,}2\,\text{mm} = \frac{0{,}2}{1000}\,\text{m}\right)$$

$$K = 100000 \cdot 310 \cdot \frac{0{,}2}{1000}$$

$$K = 100 \cdot 310 \cdot 0{,}2$$

$$\mathbf{K = 6200\,kg.}$$

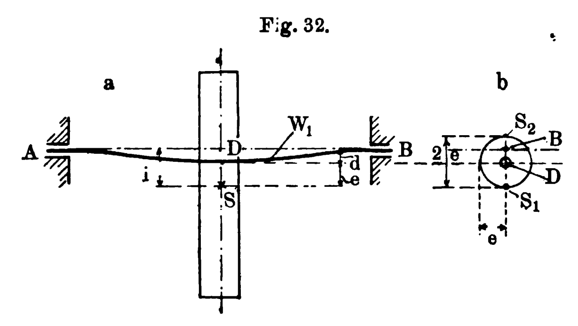
c) Verminderung der Zentrifugalkraft eines exzentrisch gelagerten Körpers, bedingt durch die Abnahme seiner Exzentrizität zur Rotationsachse infolge Verbiegung seiner Drehwelle. (Fig. 32 bis 36.)

Fig. 32a gibt den Zustand der Ruhe. Infolge der Eigengewichte von Welle und Scheibe hat sich die Welle W gegenüber der theoretischen Achse $A-B$ bis D um das Maß d durchgebogen (Lage W_1). Der Schwerpunkt S der Scheibe liege um den Betrag ihrer Exzentrizität zur Welle, d. h. um e, tiefer, also um $i = d + e$ unterhalb der theoretischen Achse.

Bewegungszustand I (Fig. 32b). Die Welle beginne nun zunächst sich äußerst langsam zu drehen. Die Zentrifugalkraft

ist noch sehr klein; sie möge noch außer acht gelassen bleiben. Es dreht sich dann der Schwerpunkt S der Scheibe um D (siehe Fig. 32b). Das Bild der Welle bleibt in der Ansicht (Fig. 32a) noch unverändert, wobei in der sich drehenden Welle das Material einem beständigen Wechsel der Biegung und der Biegungsspannungen von Druck auf Zug unterworfen ist, je nachdem Teile

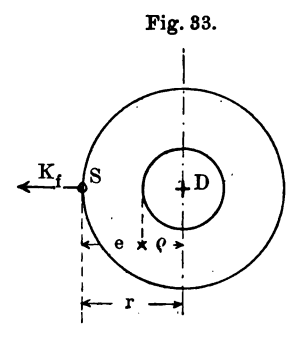
Fig. 32.



desselben nach der Wellenoberseite oder ihrer Unterseite gelangen. — Die Scheibe läuft nun unruhig; ihr Schwerpunkt S beschreibt um D den in Fig. 32b dargestellten Kreis, dessen Radius gleich der Exzentrizität e ist, so daß die Scheibe ihre Lage von oben nach unten sowie von links nach rechts bei einer Drehung um das Maß $2r = 2e$ ändert.

Einschränkung. Hier und bei Besprechung des Zustandes II sind die Trägheitskräfte, welche bei einer Zunahme der Drehbewegung ausgeübt werden und dahin wirken, daß nicht nur die Scheibe um die Welle, sondern auch die Welle um die Scheibe sich zu drehen trachtet, außer acht gelassen; im Übergangszustande III ist das aber berücksichtigt.

Fig. 33.



Bewegungszustand II (Fig. 33). Die Tourenzahl hat zugenommen, und die Welle hat sich in der Richtung der Zentrifugalkraft K_f um ϱ verbogen; sie rotiert im Kreise vom Radius ϱ um D (die Mittellage der Welle), während der Schwerpunkt S im großen Kreise vom Radius

(Gl. 73) $$r = e + \varrho$$

um D rotiert. Die Scheibe zeigt nun ihren unruhigsten Gang, da ihre Ausschläge im ganzen $2r = 2(e + \varrho)$ betragen. Wie unten bemerkt, ist dieser Zustand nicht von Dauer.

Bei erreichtem Gleichgewicht der Kräfte zwischen dem Biegungswiderstand P der Welle und der Zentrifugalkraft K_f wird:

(Gl. 74) $P = K_f = m\omega^2 r$ (siehe Gl. 67a u. 68a, S. 65).

Die Zentripetalkraft P, d. h. der Biegungswiderstand der Welle, wächst mit deren Durchbiegung ϱ. Nennt man eine Einzelkraft, am Ort der Scheibe, normal zur Welle wirkend, P', welche eine Durchbiegung „1" der Welle erzeugt, dann wird:

(Gl. 75) $$P = \varrho P'$$

und wir erhalten aus Gl. 74 die Beziehung

(Gl. 76) $$\varrho P' = m\omega^2 r$$

oder, da hier (Gl. 73) $r = e + \varrho$,

(Gl. 77) $$\varrho P' = m\omega^2 (e + \varrho)$$

(Gl. 78) $$\varrho = \frac{m\omega^2 . e}{P' - m\omega^2}.$$

Mit wachsender Winkelgeschwindigkeit ω wächst ϱ und damit die Gefahr eines Bruches der Welle, denn es wird nach

(Gl. 79) bei $$m\omega^2 = P'$$

(Gl. 80) $$\varrho = \frac{m\omega^2 e}{P' - P'} = \frac{m\omega^2 e}{0} = \infty.$$

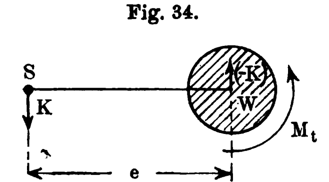
Der Bruch der Welle tritt aber schon früher ein, nämlich, wenn nach Gl. 75 $P = P' . \varrho$ den Bruchwert P_b der Welle erreicht.

(Gl. 81) $P_b = P'\varrho$ (Gleichung für den Bruch der Welle).

Einschränkung. Die vorstehend angestellten Betrachtungen beziehen sich auf den Fall gleichförmig rotierender Bewegung der Welle, und für den Fall, daß die Lage vom Wellenmittelpunkt W zum Scheibenschwerpunkt S und zu D (dem gemeinsamen Drehmittelpunkt beider), so wie gezeichnet, tatsächlich vorliegt. Dabei bleibt die Frage noch offen, ob dieser Zustand sich überhaupt einstellen kann oder muß; letzteres ist nur im Sonderfall möglich, wenn die Welle hinreichend steif, also wenig biegsam ist, wenn die Masse m der Scheibe gering und die Winkelgeschwindigkeit nicht zu groß ist.

Übergangszustand III (Beschleunigung der Drehbewegung). Im Zustande einer Beschleunigung der Drehbewegung, also während des Übergangszustandes auf eine höhere Tourenzahl, leistet die Scheibe einen Trägheitswiderstand in Richtung der Tangente an den Drehungskreis ihres Schwerpunktes S, also normal zu den bisher betrachteten, in Richtung der Radien auftretenden Kräfte. Unter Wirkung dieser Trägheitskraft der Scheibe beginnt die Welle um den Scheibenschwerpunkt S zu rotieren.

Fig. 34.



Einem Antriebe K auf Zunahme der Rotation der Scheibe (d. h. deren Schwerpunktes S) um W, von der Welle ausgehend, setzt die Scheibe den Trägheitswiderstand $(-K)$ entgegen, welche Querkraft im Hebel SW durch das auftretende Moment auf die Welle W übertragen wird. Infolgedessen erfährt in Fig. 34 die Welle W einen Antrieb $(-K)$, welcher dahin wirkt, daß die Welle sich um S zu drehen trachtet.

Es besteht die Beziehung:

(Gl. 82) $$K \cdot e = M_t$$

oder

(Gl. 83) $$K = \frac{M_t}{e}.$$

Darin ist M_t das Drehmoment, welches aufgewendet wird, um die Beschleunigung der Drehbewegung von S um W zu erzeugen.

Beträgt das Differential zunehmender Winkelgeschwindigkeit $d\omega$, und wird eine Drehung von S um W erzwungen, dann ergibt sich für S als Differential der Umfangsgeschwindigkeitsänderung

(Gl. 84) $$dv = e\,d\omega,$$

und es wird

(Gl. 85) $$K = m\frac{dv}{dt} = me\frac{d\omega}{dt}.$$

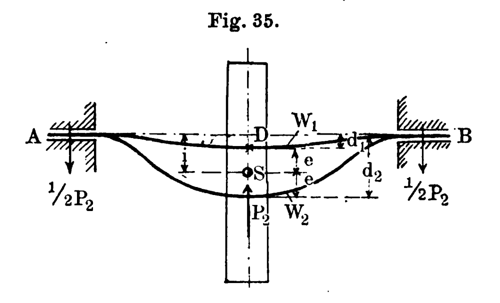
Die Kraft K, an S angreifend, führt zu einer beschleunigten Drehung von S um W, und die andere Kraft $(-K)$, an W angreifend, würde eine Drehbewegung der Welle W um S bewirken, wenn die Welle frei wäre. Da sie aber an ihren Auflagern A und B gehalten ist, ergibt sich für dieselbe nur der Beginn einer Drehung und in weiterer Folge nur eine Verbiegung, normal zu e

gerichtet. Nebenbei sei bemerkt, daß, da $(-K)$ auf den ganzen Erdball übergeht, an diesem nun das Drehmoment $(-K)e$ wirkt.

Die Kraft K kann schon bei mäßigen Werten ω sehr groß ausfallen, wenn $d\omega$ groß ist. Diese Verbiegung der Welle normal zur Erstreckung der Exzentrizität e ist für die Welle sehr gefährlich; sie kann zu groß ausfallen und dann einen Bruch der Welle veranlassen. Etwas anderes tritt noch hinzu. Die nachfolgenden Betrachtungen (Zustand IV) lassen es für einen ruhigen Gang der Scheibe erwünscht erscheinen, die Welle biegsam zu gestalten. Ist dem entsprochen und läßt man nun die Maschine zu schnell angehen, so daß wegen der großen Werte $d\omega$ bedeutende Werte K entstehen, dann folgt daraus eine besonders starke Verbiegung der Welle, welche einmal deren Bruchgefahr bedingt und bei Dampfturbinen des weiteren auch zu nachteiligen Folgeerscheinungen, zur Berührung innerer Teile und zur Zerstörung der zarten Turbinenschaufeln führen kann. Langsames Anlassen der Maschinen ist also an sich nötig, und das um so mehr, je größer die Exzentrizität und die Masse der Scheibe sind, und je geringer der Biegungswiderstand der Welle gewählt ist.

Bewegungszustand IV (Fig. 35 u. 36). Einstellung der Mittellage der im Kreise sich drehenden Wellenmittellinie in Höhenlage D der zuvor ruhenden Welle. Läßt man die Maschine schnell angehen, und ist die Masse der Scheibe groß, dann bleibt diese zunächst an ihrem Ort verharren, während die Welle sich um S dreht; dabei gelangt sie jeweils nach einer halben Periode aus der Ruhelage W_1 in die tiefere Lage W_2. Alsdann ist ihre Durchbiegung bedeutend, so daß der durch diese erzeugte, aufwärts gerichtete Druck P_2 weit größer ausfällt als das Gewicht G von Scheibe und Welle zusammen. Unter der Wirkung von P_2 hebt sich daher jeweils die Welle, wenn sie in die untere Lage gelangt ist, bis ihre mittlere Strecke um D rotiert, so daß die mittlere Höhenlage der ganzen

Fig. 35.

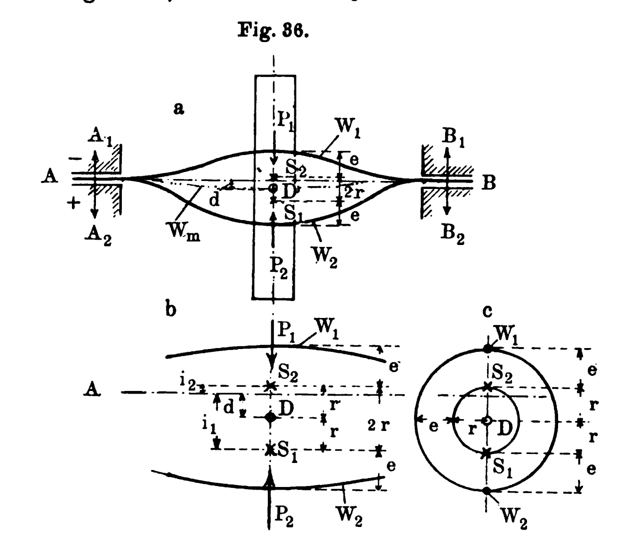


Welle W_m (Fig. 36) nun derjenigen der Ruhelage W_1 der Welle entspricht (Fig. 32). Da hierbei P_1 (Fig. 36a) nach abwärts gerichtet ist, wird:

(Gl. 86) $$P_2 - P_1 = G.$$

Bewegungszustand V (Fig. 36). Hat die Steigerung der Tourenzahl aufgehört, dann wirkt verbiegend auf die Welle (soweit die hier behandelten Trägheitskräfte in Frage kommen) nur noch die Zentrifugalkraft. Dabei ergibt sich der Bewegungszustand Fig. 36. Fig. 36a bietet die Ansicht, b dasselbe, im mittleren Teil vergrößert dargestellt, sowie c den Querschnitt zu b.

Fig. 36.



Es beschreibt nun die Welle, zumal wenn sie leicht biegsam ist, um D den größeren, hingegen der Schwerpunkt S der Scheibe den kleineren Kreis; dies Verhalten ist zu dem in Fig. 32 entgegengesetzt, woselbst „bei ω fast Null“ Welle W am Orte D verharrte und S um D (d. h. dort um W) kreiste. Es bestehen hier (Fig. 36) nun die Beziehungen:

(Gl. 87) die Zentrifugalkraft $K_f = m r \omega^2$ (Reaktion),

(Gl. 88) die Zentripetalkraft $K_p = P$ (Aktion).

Da beide allemal einander gleich sind, folgt:

(Gl. 89) $$m r \omega^2 = P \quad \text{(wie Gl. 74)}$$

oder, wie bei Besprechung von Zustand II, hier aber

(Gl. 90) $$P = P'(e + r)$$

gesetzt, worin $(e + r)$ die Durchbiegung der Welle bedeutet;

(Gl. 91) $$m r \omega^2 = P'(e + r),$$

hierin ist m die Masse der Scheibe; diejenige der Welle ist dann vernachlässigt worden.

Es folgt:

(Gl. 92) $$r = \frac{P' e}{m\omega^2 - P'}$$

oder umgeformt

(Gl. 93) $$r = \frac{P'e}{m\omega^2} + \frac{P'^2 e}{(m\omega^2)^2} + \frac{P'^3 e}{(m\omega^2)^3} + \cdots + \frac{P'^n e}{(m\omega^2)^n},$$

daraus geht hervor, daß r zunimmt einmal bei wachsenden Werten von P' und e, aber auch bei abnehmenden Werten von m und ω.

Nachdem r gefunden ist, ermittelt sich die Zentrifugalkraft K_f nun nach Gl. 87.

Sonderfälle zu V. 1. Setzt man ω limes 0, dann muß sich Zustand I (Fig. 32 b) ergeben; es wird nun

(Gl. 94) $$r = \frac{P'e}{0 - P'} = -e,$$

und es wird

$$e + r = e - e = 0;$$

d. h. es rückt W nach D, während S um D und W kreist (siehe Fig. 32 b).

2. Setzt man $m\omega^2 = P'$, dann wird:

(Gl. 95) $$r = \frac{P'e}{P' - P'} = \frac{P'e}{0} = \infty.$$

Keine Welle, möge sie auch noch so biegungsfest sein, vermag alsdann zu halten; sie bricht schon vorher unweigerlich.

3. Gesucht der Wert ω, bei welchem eine Welle bei gleichförmiger Drehung dem Bruch mit $n$facher Sicherheit widersteht.

Durch Berechnung oder durch Versuch sei festgestellt, daß der Bruch einer schon durch das vorhandene, weiter unten nochmals erwähnte Torsionsmoment beanspruchten Welle bei Lagerung

nach Art Fig. 32a erst bei einer Durchbiegung d derselben unter der Wirkung einer als Einzellast angebrachten Nutzlast P_b eintritt. Während dann

(Gl. 96) $$P_b = d\,P'$$

ist und

(Gl. 97) $$P' = \frac{P_b}{d}$$

wird, darf nur, um $n$fache Sicherheit zu erreichen, mit:

(Gl. 98) $$P' = \frac{1}{n}\,\frac{P_b}{d} = \frac{P_b}{n\,d}$$

gerechnet werden. Aus Gl. 91 folgt dann

(Gl. 99) $$m\,r\,\omega^2 = \frac{P_b}{n\,d}\,(e + r)$$

und

(Gl. 100) $$\omega = \sqrt{\frac{P_b}{n\,d} \cdot \frac{(e + r)}{m\,r}}.$$

(Erlaubte Tourenzahl bei $n$facher Sicherheit gegen Bruch. Zur Definition von P_b siehe die Erläuterungen zu Gl. 102.)

Erzielung ruhigen Ganges der Scheibe. Um einen ruhigen Lauf zu erreichen, muß r klein, also in Gl. 93 P' klein gehalten sein, d. h. es muß die Welle biegsam gestaltet werden, mithin von kleinem Durchmesser und mit hinreichend großer Stützweite $A-B$ gelagert sein. Für

$$P' = 0$$

wird

$$r = \frac{0}{m\,\omega^2} = 0 \quad \text{(vgl. Gl. 92).}$$

Alsdann läuft die Welle vollkommen ruhig; ihr Material muß dabei aber unendliche Festigkeit aufweisen, anderenfalls ist sie vor Erreichung dieses gedachten Falles schon gebrochen.

Man erzielt nach Gl. 93 ruhigen Gang, d. h. kleine Werte r bei kleinen Werten an Exzentrizität e, hingegen großen Werten m und ω. Ferner erreicht man den Zweck durch Wahl von Wellen mit kleinem P', d. h. solchen Wellen, die so gelagert sind, daß ihre Biegsamkeit den erlaubten Betrag nicht unnötig überschreitet. Da sich der Wellendurchmesser aber wegen des durch sie zu übertragenden Torsionsmomentes nicht beliebig schwächen läßt, hat man ihre Biegsamkeit durch hinreichend große Stützweite

A—B zu erreichen; dabei bleibt, um die erforderliche Sicherheit gegen Bruch zu erhalten, nach Gl. 99, diese umgestellt, zu fordern:

(Gl. 101) $$\frac{P_b}{n d}(e + r) \geqq m r \omega^2$$

oder die Bruchlast:

(Gl. 102) $$P_b \geqq \frac{n d m r \omega^2}{e + r}.$$

Hierin ist P_b eine Querkraft, am Ort der Scheibe angebracht, welche zum Bruch der Welle führt, und zwar für den Fall des gleichzeitigen Auftretens einer auf einen erforderlichen Sicherheitsgrad gesteigerten Torsionsbeanspruchung; ferner ist darin n die geforderte Sicherheit gegen Bruch, den die Wirkung der Zentrifugalkräfte erstrebt, m die Masse der Scheibe (oder genauer von Scheibe und Wellenanteil), r der nach Gl. 92 ermittelte Radius der Drehbewegung von S, ω die erlaubte größte Winkelgeschwindigkeit der Drehung und e die Exzentrizität von S in bezug auf die Wellenachse.

Beanspruchung der Fundamente. Die Kraft P geht auf die Fundamente über, davon kommt bei symmetrischer Anordnung der Auflager A und B auf jedes Lager $\frac{P}{2}$. Die Richtung der Kräfte verläuft jeweils in der Drehebene normal zur Welle, von dieser radial ausgehend und bei je einer Umdrehung der Scheibe die Richtung ringsum im Kreise wechselnd. Drehschwingung liegt für S dabei vor.

Dieselbe Ursache, die, wie vorstehend erwähnt, dazu führt, den Drehungsradius des Scheibenschwerpunktes klein zu gestalten, bewirkt auch eine Verminderung jener Kraft P, da nach Gl. 89 $P = m r \omega^2$ ist.

Setzt man darin aus Gl. 92 den Wert für r ein, so ergibt sich

(Gl. 103) $$P = m \omega^2 \cdot \frac{P' . e}{m \omega^2 - P'}$$

und für den Fall $m \omega^2 = P'$ zu

$$P = m \omega^2 \cdot \frac{P' . e}{P' - P'} = \infty,$$

hingegen für $\omega = 0$ zu

$$P = 0 \cdot \frac{P' . e}{- P'} = 0$$

und für $\omega = \infty$ zu

$$P = \infty \cdot \frac{P' . e}{\infty} = P' . e.$$

Es kreist in letzterem Fall die Welle um den Schwerpnnkt S der Scheibe (oder der Scheibe und eines Teiles der Welle). Dieser

nur gedachte Sonderfall entspricht aber einem labilen Gleichgewicht. Bei geringstem Herausrücken des Scheibenschwerpunktes S aus dem Drehmittelpunkt D der Welle kehrt S dahin nicht wieder zurück. Sofort wird dann die Fliehkraft unendlich groß und die Welle bricht.

Die Untersuchung der hier behandelten Vorgänge bildet einen wichtigen Abschnitt der theoretischen Mechanik, welcher in bezug auf die maschinelle Anordnung zumal den Maschineningenieur, aber wegen der Standfestigkeit der Fundamente auch den Bauingenieur interessiert. Es ist noch der Umstand von besonderer Bedeutung, ob die Zeitdauer der Schwingungsperiode von Welle und Scheibe, durch das elastische Verhalten der durchgebogenen Welle bedingt, mit der Umdrehungszeit übereinstimmt oder nicht. Ist ersteres der Fall, dann können durch Addition der Impulse verstärkte Schwingungen entstehen[1]).

d) Übertragung von Drehschwingung (Revolution) auf die Masse des umgebenden Mittels durch einen nach außen gerichteten Druck.

Für eine sich drehende Scheibe, bei welcher ausschließlich Rotation vorliegt (siehe S. 71, Fig. 28), besteht ein Gleichgewichtszustand. Die Zentrifugalkräfte einander gegenüberliegender Massenteile wirken nach außen, in entgegengesetzte Richtungen weisend, aber die Zugfestigkeit des Körpers verhindert, daß jene beiden Massen einander fliehen. Es herrscht dann Gleichgewicht zwischen den nach außen weisenden Zentrifugalkräften und den nach innen ziehenden Materialspannungen des Körpers. Ein statisches System liegt vor.

Anders liegen die Verhältnisse, wenn die Zugfestigkeit fehlt. Es wirken alsdann die Fliehkräfte nach außen hin, wie z. B. in Kurven an den Spurkränzen der Eisenbahnräder; sie drücken

---

[1]) Siehe darüber z. B.: Dr. A. Stodola, Die Dampfturbinen, und zwar von Abschnitt 62 ab, und die kritische Geschwindigkeit einer Welle S. 188. Verlag von Julius Springer, Berlin 1905. — Derselbe, Schweiz. Bauzeitung vom 28. Oktober 1916. — O. Föppl, Zeitschr. f. d. gesamte Turbinenwesen, Heft 6 und 7, 1916. — G. Kull, Zeitschr. d. Ver. D. Ing. 1918, S. 251.

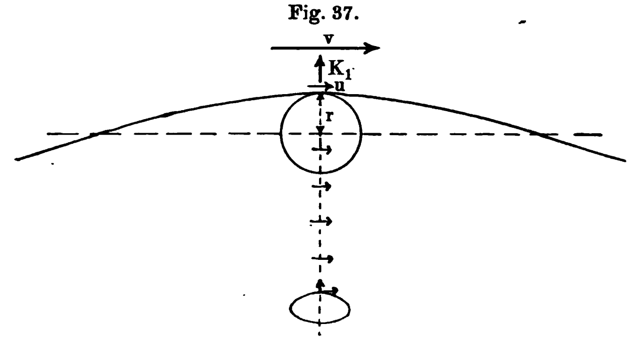
Ferner zur Verhinderung der Entstehung gefährlicher Resonanzschwingungen im Fundament-Baukörper; siehe z. B. Dr.-Ing. Paul Müller, „Dampfturbinen-Fundamente aus Eisenbeton“ i. d. Zeitschr. „Der Bauingenieur“ 1921, Heft 16 u. 17.

gegen die Schienen, und der Wagen erleidet unter Wirkung des Gegendruckes der ersteren die seitliche Ablenkung, so daß er eine gekrümmte Bahn beschreibt. Für eine Lokomotive von $G = 60$ t Gewicht und $v = 20$ m sek^{-1} Fahrgeschwindigkeit beträgt der horizontal nach außen gerichtete Druck in einer Gleiskrümmung von $r = 500$ m Radius:

$$K = \frac{m v^2}{r} = \frac{60\,\mathrm{t}}{9{,}81} \cdot \frac{20^2}{500} = 4{,}89\,\mathrm{t} = 4890\,\mathrm{kg}.$$

Für das Massenteilchen einer Ozeanwoge, welches bekanntlich in vertikaler Ebene Drehschwingung vollführt, betrage die Drehschwingungsgeschwindigkeit $u = 1$ m sek^{-1} und der Drehschwingungsradius, gleich der halben Wellenhöhe, $r = 2$ m. Alsdann

Fig. 37.



besteht für jede Wassermenge von 1 cbm Volumen eine nach oben gerichtete Zentrifugalkraft, welche sich in gleicher Weise berechnet. Dabei schwingen alle Wasserteilchen derselben Vertikalen, wie die Pfeile das andeuten, zurzeit im horizontalen Bogenteil ihrer kreisähnlichen Bahn. Je ein Kubikmeter Wasser entwickelt hier, da sein Gewicht $G = 1000$ kg, eine Fliehkraft von

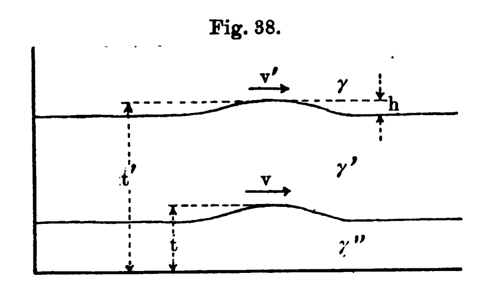
$$K_1 = \frac{m v^2}{r} = \frac{1000}{9{,}81} \cdot \frac{1^2}{2}; \quad K_1 = 51\,\mathrm{kg}.$$

Nach der Tiefe zu fallen die Drehschwingungen schwächer aus. Immerhin wirken auch dort zurzeit die Kräfte K aufwärts.

Die Luft oberhalb der Wasseroberfläche erleidet durch den Vorübergang der Welle auch Bewegungsantriebe, deren Studium bisher weder auf theoretischem noch praktischem Wege erfolgt ist. Wie eine Wasserschicht, deren Elemente Drehschwingung vollführen, eine solche auch in angrenzenden Schichten erzeugt, so findet auch hier etwas Ähnliches zwischen der wellenbewegten

Wasserschicht und der überlagernden Luftschicht statt. Es besteht aber die Frage, welche Folgen die empfangene Anregung zur Ausführung von Drehschwingung für die Luft hat, da die in der Luft entstehenden Wellen sich nach anderen Gesetzen als die Oberflächenwellen des Wassers fortpflanzen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wasserwellen wächst mit der Wurzel aus der Wassertiefe, bis zu der die Schwingungsbewegung hinabreicht. Würde es eine Flüssigkeit geben, in welcher die Oberflächenwelle sich so schnell fortpflanzt, wie die Welle in der Luft, dann könnten auch die Luftteilchen jene Drehschwingung regelmäßig mitmachen. Für einen solchen Fall lassen sich zwar die theoretischen Grundlagen ableiten; er findet sich aber auf der Erde nicht vor. Hätte der Ozean irgendwo auf großer Erstreckung eine Tiefe von 7992 m und befände sich darüber Luft von 0° C Temperatur, und nähme die Lufttemperatur mit der Höhe nach dem sogenannten adiabatischen Wärmezustand ab, dann würde bei sehr langgestreckten Wellen, wie diejenige von Ebbe und Flut sind, für die Oberflächenwelle des Wassers sowie diejenige der Luft beidemal die gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit $v = \sqrt{g.t}$ sich ergeben. Im vorliegenden Falle würde $v = \sqrt{9{,}81.7992} = 280$ m sek^{-1}, und es würden dann die Drehschwingungen der Luft denen des Wassers der Periode nach gleich werden. Die Drehschwingungen des Wassers dürften in diesem Falle in der benachbarten Luft ihnen ähnlich geordnete Drehschwingungen erzeugen.

Fig. 38.



Bei höherer Lufttemperatur fiele die erforderliche Wassertiefe entsprechend größer aus. (Siehe auch V, A, 6, S. 71 unten.)

Bemerkt sei noch, daß die Einwirkung einer Oberflächenwelle nach außen hin (in Fig. 38 nach oben hin) auf ein anderes stoffliches Mittel allenfalls wie folgt sich erreichen ließe, derart, daß in beiden Mitteln Wellen gleicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit $v = v'$ entstehen. Ein langes Gerinne ist unten mit Wasser gefüllt; in demselben wird eine fortschreitende Welle erzeugt. Die Wassertiefe am Scheitel

derselben beträgt t. Die Welle muß hinreichend lang gestreckt sein, weil sie sich andernfalls zu schnell umformt. Über dem Wasser ist eine Gasschicht schwerer als atmosphärische Luft anzubringen, deren Tiefe am Ort eines etwa entstehenden Wellenberges den Wert t' messen soll. Das Einheitsgewicht dieses Gases sei γ', dasjenige der darüber lagernden atmosphärischen Luft γ; alsdann steht die Gaswelle unter der sie beeinflussenden Druckdifferenz $h(\gamma' - \gamma)$. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Flüssigkeitsoberflächenwellen richtet sich nun nach dem Beschleunigungswert:

$$p' = g \cdot \frac{\gamma' - \gamma}{\gamma'}.$$

Für das Wasser ist das hier:

$$p = g \cdot \frac{\gamma'' - \gamma'}{\gamma''},$$

oder, da γ'/γ'' verschwindend klein ist:

$$p = g \frac{\gamma''}{\gamma''} = g.$$

Das Gesetz fortschreitender Geschwindigkeit der Flüssigkeitswellen sehr langgestreckter Gestalt bei geringer Flüssigkeitstiefe t lautet nun:

$$v = \sqrt{p \cdot t},$$

also für das Gas $$v' = \sqrt{g \frac{\gamma' - \gamma}{\gamma'} t'}$$

und für das Wasser $$v = \sqrt{g t}.$$

Es ist also zu wählen für

$$v = v',$$

$$\sqrt{g t} = \sqrt{g \frac{\gamma' - \gamma}{\gamma'} t'},$$

$$t' = \frac{\gamma'}{\gamma' - \gamma} \cdot t.$$

Genau läßt sich das zu wählende Verhältnis von $t' : t$ nur durch Versuche ermitteln, da für Wellen endlicher Länge die Gleichung $v = \sqrt{g t}$ nicht genau stimmt und hier auch die Wirkung der Reibung der Flüssigkeit an Sohle und Gerinnwandungen unberücksichtigt geblieben ist. Vielleicht ließen sich auch Mittel

finden, die Drehschwingung an der Gaswelle so in sichtbarer Form nachzuweisen. Derartige Untersuchungen sind von Wichtigkeit für das Verständnis derjenigen Vorgänge, welche sich außerhalb von Leitern elektrischer Ströme vollziehen.

e) Oberflächenwellen und Drehschwingungen im ätherischen Spannungszustande der Masse.

Das, was vorstehend nur in Sonderfällen angenähert sich erreichen läßt, die Übereinstimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle im Wellenleiter und in seinem umgebenden Mittel (in Fig. 38 der Welle des Wassers und des darüber gelagerten schweren Gases), findet sich für den ätherischen Spannungszustand der Masse[1]) überall gegeben, denn es durcheilen die Wellen der Elektrizität, sowie des Wärme- und des Lichtstrahles sowohl das dichte Metall wie den Äther des umgebenden Raumes mit gleicher Geschwindigkeit. Eine Welle, welche einen metallischen Leiter in dessen Längsrichtung durcheilt und dessen Material, zumal an der Oberfläche des Leiters, in Drehschwingung versetzt, wird in dem den Leiter umgebenden Mittel des Äthers auch Drehschwingung erzeugen, deren zeitliche Periode sich in geordneter Weise derjenigen der Materialschwingung des Leiters anpaßt. Daher bedarf es im Interesse des Studiums und noch mehr des leichteren Verständnisses der elektrischen und, wie in Lieferung 2 gezeigt werden wird, der magnetischen Vorgänge insbesondere eines Studiums der Drehschwingungen und ihrer Wirkungen nach außen hin. Das aber ist bisher noch nicht zum Gegenstande physikalischer Sonderstudien gemacht. Das Experiment zeigt nur die vorhandenen Wirkungen, und es läßt deren Gesetze erkennen, so daß deren praktische Anwendung erreicht wird; es lehrt aber noch nicht, wie diese Wirkungen zustandekommen. Ersteres ist naturgemäß die Hauptsache und zunächst allein von praktischem Nutzen; für das schnellere Erfassen der Vielheit der Erscheinungsformen ist aber ein tieferes Eindringen in das Wesen der ihnen zugrunde liegenden Vorgänge doch auch von nicht zu unterschätzendem Wert, denn es führt zur Übersicht

---

[1]) Als Äther ist hier der Träger der elektrischen und magnetischen fernwirkenden Kräfte sowie der Licht- und Wärmestrahlen verstanden; vgl. III, 1., S. 31.

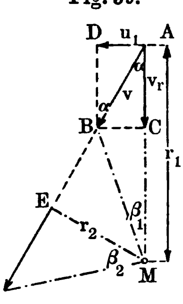
und zu selbständigerem Denken. Eine Lehrtätigkeit, welche die Erfolge der theoretischen Richtung unseres Erkenntnisvermögens unbeachtet läßt, bleibt einseitig; sie hebt den Lernenden nicht so schnell zu solcher Höhe empor, daß er zu selbständig schaffender Arbeit befähigt wird, wie wenn ihm nebenher auch der Ausblick auf das Wesen und auf den Zusammenhang der Vorgänge an Hand theoretischer Betrachtung geboten wird. Das beweist die höhere Baukunst des Ingenieurs gegenüber den Erfolgen des einfachen Handwerkers in schlagendster Weise.

B. Das Gesetz der Flächen und seine Anwendungen.

1. Die rein mathematisch-geometrische Beziehung.

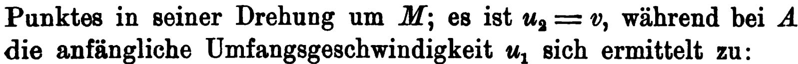
Ein Punkt bewege sich ohne Einwirkung einer Kraft mit der Geschwindigkeit v von A nach B und weiter nach E und F. Die Bewegung des Punktes ist daher eine geradlinige und gleichförmige. An beliebigem Ort sei ein Punkt M gewählt und dieser als Drehpunkt aufgefaßt.

Fig. 39.



a) Beziehung der Umfangsgeschwindigkeiten u zur Größe der Radienvektoren r.

Anfänglich schließt AB mit dem Radiusvektor $AM = r_1$ den Winkel α ein. In E angelangt, steht der Radiusvektor r_2 normal zu EF. Hier bildet v zugleich die augenblickliche Umfangsgeschwindigkeit u_2 des Punktes in seiner Drehung um M; es ist $u_2 = v$, während bei A die anfängliche Umfangsgeschwindigkeit u_1 sich ermittelt zu:



$$u_1 = v \, . \sin \alpha$$
$$v = u_2$$
$$\overline{u_1 = u_2 \, . \sin \alpha.}$$

Ferner ist $r_2 = r_1 . \sin \alpha$. Es folgt:

(Gl. 104) $$\frac{u_1}{u_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

oder

(Gl. 104a) $$u_2 = u_1 \frac{r_1}{r_2} \, .$$

Satz 1: Die linearen Umfangsgeschwindigkeiten in der Drehbewegung um M verhalten sich umgekehrt wie die Radienvektoren.

b) Beziehung der Winkelgeschwindigkeiten ω zu den Radienvektoren r.

Nun ist jeweils $u_1 = r_1 \cdot \omega_1$ und $u_2 = r_2 \cdot \omega_2$; das in Gl. 104 eingesetzt, ergibt:

$$\frac{r_1 \cdot \omega_1}{r_2 \cdot \omega_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

(Gl. 105) $$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

Satz 2: Die Winkelgeschwindigkeiten ω sind den Quadraten der Radienvektoren umgekehrt proportional.

c) Beziehung zwischen den Rotationsmomenten.

Aus b, Gl. 105 folgt: $\omega_1 . r_1^2 = \omega_2 . r_2^2 = C.$

Das Produkt: $\omega . r^2$ bezeichnet man als Rotationsmoment; es ist das die lineare Umfangsgeschwindigkeit, multipliziert mit r. Dieses Produkt ist unveränderlich — eine Konstante.

Satz 3: Das Rotationsmoment bleibt bei Annäherung oder Entfernung des Punktes vom Drehungsmittelpunkt konstant.

d) Beziehung der Zeitdauer t für Durcheilung gleicher Sektorwinkel β zur Größe der Radienvektoren für den betrachteten materiellen Punkt.

Es ist jeweils $\beta = \omega . t$, also

$$\beta_1 = \omega_1 . t_1 \quad \text{und} \quad \beta_2 = \omega_2 . t_2.$$

Für $\beta_1 = \beta_2$ wird:

$$\omega_1 . t_1 = \omega_2 . t_2$$

(Gl. 106) $$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \text{ (vgl. Gl. 105).}$$

Satz 4: Die Umlaufszeiten (für gleiche Sektorwinkel β) verhalten sich wie die Quadrate der Radienvektoren.

Vergleiche hierzu das Beispiel zum nachfolgenden Abschnitt 2 und den Satz 4a, S. 94.

e) Das Gesetz der Flächen.

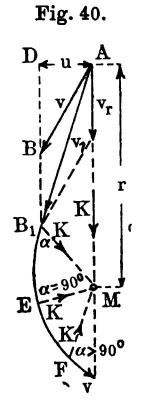
Die Dreiecke ABM und EFM sind inhaltsgleich, weil deren Basislängen AB und EF einander gleich, nämlich beide in der Zeiteinheit gleich v sind und ihre Höhe als Lot auf AE beidemal r_2 ist. Diese gleichen Flächen werden von den Radienvektoren in der Zeiteinheit beschrieben. Auch für eine beliebige Zeitspanne t gilt diese Übereinstimmung, da sich auch dann beidemal die gleiche Basislänge $v.t$ für die betreffenden Dreiecke ergibt.

Satz 5: Die Radienvektoren beschreiben in gleichen Zeiträumen gleiche Sektorflächen. (Es ist dies das zweite Kepplersche Gesetz.)

2. Das Gesetz der Flächen bei dem Hinzutreten nur radialer Kräfte.

Sofern normal zum Radiusvektor gerichtete Kräfte fehlen, hingegen in Richtung desselben Kräfte K hinzutreten, behalten die vorstehend unter 1 abgeleiteten Gesetze ihre Gültigkeit, da sie sich nur auf die Größe der normal zum Radiusvektor gerichteten Geschwindigkeit u beziehen, welche durch die Wirkung der hinzutretenden radial gerichteten Kräfte K keine Änderung erfährt (Fig. 40).

Fig. 40.



Kraft K erzeuge an dem nun materiellen Punkte bei A eine Geschwindigkeitsvermehrung v_r (genau genommen ist v_r nur ein Differentialwert). Es ergibt sich die Geschwindigkeit v_1, deren Seitenwert, welcher als Umfangsgeschwindigkeit auftritt, unverändert den Wert $AD = u$ besitzt.

Unter Wirkung der Radialkräfte K beschreibt der materielle Punkt eine gekrümmte Bahn, in welcher die Geschwindigkeit v sich so lange steigert, wie K einen spitzen Winkel mit ihrer Richtung bildet, so daß K in Richtung von v Arbeit verrichtet. Am Ort E, wo $\alpha = 90^0$ mißt, ist die größte Geschwindigkeit erreicht, hernach nimmt dieselbe wieder ab, weil v und K nun den Winkel $\alpha > 90^0$ einschließen und K mithin negative Arbeit verrichtet.

Welcher Art die Bahnkurve ist, hängt von dem Gesetz ab, welchem der Wechsel der Kraft K unterliegt. Für die Himmels-

körper, für welche die Anziehungskraft K dem Gesetze $K = A \cdot \frac{1}{r^2}$ gehorcht, ergeben sich bekanntlich Ellipsen oder Hyperbeln als Bahnkurven. Im Augenblick größter Annäherung an den Anziehungsmittelpunkt M z. B. der Sonne fällt die Geschwindigkeit am größten aus, z. B. für die Erde in ihrer Bahn um die Sonne Anfang Januar um etwa 1000 m sek^{-1} oder rund ein Dreißigstel größer als zur Zeit der größten Entfernung der Erde von der Sonne, der „Sonnenferne" Anfang Juli.

Die Umlaufszeiten der Planeten.

Gedacht seien zwei Planeten, P_1 und P_2, in verschiedenem Abstande, r_1 und r_2, von der Sonne, welche sich in Kreisbahnen bewegen. Ihre Umlaufsgeschwindigkeiten seien u_1 und u_2 und die entsprechenden Zentripetalbeschleunigungen p_1 und p_2; diese, durch die Massenanziehung hervorgerufen, welche mit dem Quadrat der Entfernung vom Massenmittelpunkt abnimmt, stehen zueinander in der Beziehung:

(Gl. 107) $$\frac{p_1}{p_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

Für p_1 und p_2 die je gleich großen Werte der Zentrifugalbeschleunigung $r_1 \omega_1^2$ und $r_2 \omega_2^2$ eingesetzt (vgl. Gl. 68a, S. 65), wird:

$$\frac{r_1 \omega_1^2}{r_2 \omega_2^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

und

(Gl. 108) $$\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{r_2^3}{r_1^3}.$$

Der durchlaufene Vektorwinkel β berechnet sich nun zu: $\beta = \omega t$, also wird $\omega = \frac{\beta}{t}$ und für gleiche Winkelwerte β:

(Gl. 109) $$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{t_2}{t_1}.$$

Das in Gl. 108 eingesetzt, ergibt:

(Gl. 110) $$\frac{t_2^2}{t_1^2} = \frac{r_2^3}{r_1^3}.$$

Satz 4a: Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die Kuben der Radienvektoren.

(Es entspricht das dem dritten Kepplerschen Gesetz, welches sich aber in erweiterter Weise auch auf alle Planeten bezieht, wiewohl diese elliptische Bahnen verfolgen.)

Das Gesetz der Flächen und die ihm verwandten Beziehungen bildet eine der Hauptgrundlagen der theoretischen Astronomie und Meteorologie; letzteres, da auch die atmosphärische Luft bei Annäherung an die Erdachse hinsichtlich ihrer Bewegungen und Geschwindigkeiten jenem Gesetze dort genau folgt, wo keine Störungen eintreten, d. h. keine in Richtung der Breitenkreise wirkenden Kräfte auftreten, die allerdings niemals ganz fehlen, insbesondere nicht nahe dem rauhen Erdboden. In höheren Schichten treten störende Kräfte, in Richtung der Breitenkreise wirkend, zumal dann auf, wenn obere und untere Luftschichten eine Mischung eingehen. Meine neueren Untersuchungen beziehen sich nun auf die Beantwortung der Frage, inwieweit die Bewegungen der atmosphärischen Ebbe und Flut derartiges bewirken können und infolgedessen die Witterungsvorgänge zu beeinflussen vermögen.

Ferner wird zur Beurteilung der Vorgänge in allen Wirbeln die Kenntnis des Gesetzes der Flächen gebraucht.

3. Anwendungen des Gesetzes der Flächen.

a) Zunahme der Rotation bei Zusammenziehung der Himmelskörper.

Gesetzt, es habe die ganze Masse des Sonnensystems, bevor die Planeten sich absonderten, eine gemeinsame Rotation besessen, und es sei eine Zusammenziehung der Massen infolge Wärmeausstrahlung und Erkaltung erfolgt, dann hat dabei die lineare Umfangsgeschwindigkeit umgekehrt proportional den Vektorwerten r sich verändert; sie hat mit dem Vorgange der Zusammenziehung zugenommen.

Nach Gl. 104a, S. 91, wird $u_2 = u_1 \frac{r_1}{r_2}$, und das in die Gleichung für die Zentrifugalbeschleunigung $p_{f_2} = \frac{u_2^2}{r_2}$ eingesetzt, ergibt:

$$\text{(Gl. 111)} \qquad p_{f_2} = u_1^2 \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot \frac{1}{r_2} = u_1^2 r_1^2 \frac{1}{r_2^3}.$$

Die Zentripetalbeschleunigung mißt nach Gl. 107, diese umgeformt, hingegen:

$$\text{(Gl. 112)} \qquad p_2 = p_1 r_1^2 \cdot \frac{1}{r_2^2};$$

hierin beidemal u_1 und r_1 gegebene Anfangswerte.

Mit abnehmenden Werten r_2 nimmt also die Zentrifugalbeschleunigung nach der dritten Potenz zu, die Zentripetalbeschleunigung das aber nur nach der zweiten Potenz. War erstere anfangs kleiner als letztere, dann muß sich bei fortgesetzter Zusammenziehung der Zeitpunkt ergeben, wann beide Beschleunigungen einander gleich werden. Alsdann hört für die kreisende Masse am Umfang die weitere Annäherung an den Zentralkörper auf; sie hält sich von da ab als Ring, um letzteren sich drehend, im Raume frei schwebend. Dieser Zustand der Ringabsonderung einer Masse tritt ein, wenn für sie p_{f_2} und p_2 einander gleich geworden sind, wenn also ist:

$$p_1 r_1^2 \cdot \frac{1}{r_2^2} = u_1^2 r_1^2 \cdot \frac{1}{r_2^3}$$

oder

$$\text{(Gl. 113)} \qquad r_2 = \frac{u_1^2}{p_1} \qquad \left(\text{Dimension } \frac{\text{m}^2\,\text{sek}^{-2}}{\text{m sek}^{-2}} = \text{m}\right).$$

Interessant sind nun noch Betrachtungen darüber, welche Umstände dahin führen mögen, daß ein Ring sich, wie das am Saturn der Fall ist, als solcher erhält, und wann er dem entgegen zerreißen und sich zu einer Kugel zusammenballen wird. Hier ist aber nicht der Ort, um diese Frage zu erörtern. Es sei nur erwähnt, daß jede Ungleichförmigkeit in der Verteilung der Massen des Ringes dahin wirkt, daß solches erstrebt wird, so z. B. Ungleichmäßigkeiten in der Massenverteilung, wie solche durch die Relativkräfte bedingt sind, die auch das Phänomen der Flut und Ebbe erzeugen.

Bei den hier erörterten Vorgängen kommen noch die Folgen von Massenmischungen und von Reibungswirkungen in Betracht, welch' letztere eintreten, wenn in den einzelnen Kugelzonen die Winkelgeschwindigkeits-Änderungen nicht gleich groß ausfallen.

b) Ausbildung einer Rotationszunahme, im Beispiel für Mond und Erde behandelt.

Das Gleichgewicht zwischen Fliehbeschleunigung und Beschleunigung der Erdanziehung ist vorhanden bei:

$$p_f = p_a.$$

Darin ist $p_f = \frac{u^2}{r}$ und $p_a = g_a \left(\frac{r_e}{r}\right)^2$ (siehe Gl. 107, S. 94).

Es wird: $$\frac{u^2}{r} = g_a \left(\frac{r_e}{r}\right)^2.$$

(Gl. 114) $$u = \sqrt{g_a \frac{r_e^2}{r}}.$$

Hierin bedeuten g_a die Beschleunigung der Erdanziehung an der Erdoberfläche, d. h. im Abstande r_e vom Erdmittelpunkt, r_e den Erdradius und r den Abstand des Mondes vom Erdmittelpunkt. Es ist $r = 60{,}28\, r_e$ und die Beschleunigung der Erdanziehung (nicht der Schwere) am Äquator $g_a = 9{,}815\,\text{m}\,\text{sek}^{-2}$; siehe darüber hier Abschnitt VIIe.

$$u = \sqrt{\frac{g_a \cdot r_e}{60{,}28}} = \sqrt{\frac{9{,}815 \,.\, 6\,377\,400}{60{,}28}} = 1020\,\text{m}\,\text{sek}^{-1}.$$

Hier sei als Annäherung vorausgesetzt, daß zur Zeit der Abtrennung des Mondes von der Erde die Masse ihres äußeren Randes die nämliche Umfangsgeschwindigkeit besessen habe wie heute noch der Mond in seiner Bahn um die Erde. Bei gleicher Winkelgeschwindigkeit der inneren und äußeren Teile der Erde hat die Masse der Erde im Abstande des Erdradius gegenwärtiger Größe dann eine lineare Umfangsgeschwindigkeit besessen von

$$u_1 = \frac{r_e}{r} \cdot u = \frac{1}{60{,}28} \cdot 1020 = 16{,}9\,\text{m}.$$

Jetzt beträgt die lineare Umfangsgeschwindigkeit der Erdrotation am Äquator $463{,}7\,\text{m}\,\text{sek}^{-1}$. Die lineare Geschwindigkeit im Abstande r_e vom Erdmittelpunkt hätte hiernach also zugenommen, und zwar auf das

$$n = \frac{463{,}7}{16{,}9} = 27{,}4\,\text{fache}.$$

Auch die Winkelgeschwindigkeit würde für Punkte der Erdoberfläche und für diese überhaupt gegenüber derjenigen zur Zeit der Abtrennung der Masse des Mondes von der Erdmasse um jenen Betrag größer geworden sein, wenn die gemachte Annahme, daß die Winkelgeschwindigkeit des Mondes in seiner Drehung um die Erde sich nicht geändert habe, richtig wäre; denn es ist nach der Beziehung $u = r\omega$ oder $\omega = \frac{u}{r}$ für einen bestimmten Wert r, hier r_e, ω proportional u. Jene Annahme trifft aber, wie im nachfolgenden Abschnitt d, S. 99, gezeigt wird,

nicht zu. Die Winkelgeschwindigkeit der Mondmasse war damals in ihrer Drehung um die Erde kleiner als jetzt, so daß die Zunahme der Winkelgeschwindigkeit der Erde seit Abtrennung der Mondmasse sich um mehr als $n = 27{,}4$ gesteigert hat. Es tritt ein Wert $n_1 > n$ an ihre Stelle. Heute hat jene Zahl n die Bedeutung, daß sie die Beziehung zwischen der gegenwärtigen Umlaufzeit des Mondes um die Erde gegenüber derjenigen der Erdrotation gibt. — Sollten die hier gebotenen Zahlenwerte der Wirklichkeit nicht genau entsprechen, dann bitte ich solches entschuldigen zu wollen. Meine Zeit reicht nicht aus, um mich eingehender, als hier geschehen, mit dem Gegenstande zu beschäftigen.

c) Spiralbildungen der Massen sich zusammenziehender Himmelskörper, insbesondere der Erde.

Oft habe ich gedacht, wie es mit dem Gesetz der Flächen vereinbar sei, daß der Gegensatz zwischen der Winkelgeschwindigkeit der Erde und derjenigen des Mondumlaufes um die Erde nicht größer ist als $n_1 > 27{,}4$. Es mag dies aber mit dem Umstande zusammenhängen, daß damals, als die Massen, welche heute den Mond bilden, noch Gasform besaßen, dieselben eine sehr geringe Dichte hatten. Der Kern, aus welchem sich die Erde gebildet hat, mag damals im Durchmesser weit kleiner gewesen sein als derjenige des Mondbahndurchmessers, und ferner werden die Massen im Innern der heute noch heißen Erde eine verhältnismäßig weitaus kleinere Zusammenziehung erfahren haben als diejenigen näher der Erdoberfläche. Nimmt man z. B. an, daß zur Zeit der Abtrennung des Mondes von der Erde deren Halbmesser halb so groß gewesen ist wie jetzt, er also nur $\frac{60}{2} = 30\, r_e$ betragen habe, und daß die Zusammenziehung, in Teilen der Radien der Kugelschalen ausgedrückt, außen weitaus kleiner gewesen ist als im Innern, dann mag die Zusammenziehung im Mittel für die Massen weit kleiner ausgefallen sein, als nach dem Verhältnis 30 : 1 zu erwarten wäre. Man muß aber schon etwa auf die Zahl 6 hinuntergehen, um eine Übereinstimmung mit den Verhältnissen der Wirklichkeit rechnerisch zu finden, denn es besteht die Beziehung:

$$\omega_1 = \omega \left(\frac{r}{r_1}\right)^2, \text{ vgl. Gl. 105, S. 92.}$$

Für $\frac{r}{r_1} = 6$ z. B. ergibt sich $\omega_1 = \omega \cdot 36$, ein Wert, welcher sich der Zahl $n_1 < 27{,}4$ nähert.

Für die äußeren Schichten wäre dabei die Zunahme der Winkelgeschwindigkeit weit größer, für die inneren Kugelschalen weit kleiner gewesen, so daß Spiralbildungen die Folge sein mußten, wobei die äußeren schneller rotierenden Massen durch Reibung und Massenmischung auf die inneren Massen eingewirkt haben, die Rotation der letzteren steigernd. Dabei müssen, bis eine mittlere Rotation sich eingestellt hat, bedeutende Kraftwirkungen geäußert worden sein. Derartige Vorgänge mögen sich, wiewohl sehr abgeschwächt, auch heute noch fortsetzen. Wir wissen daher nicht bestimmt, ob die flüssige Erdmasse im Erdinnern genau die nämliche Winkelgeschwindigkeit besitzen mag wie die feste Erdkruste. Wohl wissen wir aber, daß für die beweglichen Teile der Erdmasse oberhalb der Oberfläche der Erdkruste dies nicht der Fall ist. Eine Luft- oder Wassermasse, welche in die Tiefe sinkt und sich dabei der Erdachse nähert, nimmt z. B. an Winkelgeschwindigkeit zu, weshalb sie vermöge vermehrter Fliehkraft zum Äquator hindrängt, während aufwärts steigende Massen an Winkelgeschwindigkeit abnehmen und gegen den Pol hindrängen.

Auch horizontale Verschiebungen der Massen führen auf der Erdoberfläche zu einer Annäherung oder Entfernung in bezug auf die Erdachse und in der Polprojektion das hinsichtlich ihrer Lage zum Rotationsmittelpunkt. Die Massen unterliegen dabei dem Gesetz der Flächen. Luftmassen, welche z. B. in der Höhe aus südlichen Gegenden durch ein polwärts gerichtetes Gefälle auf der Nordhemisphäre nordwärts bewegt sind, nehmen nach dem Gesetz der Flächen an linearer Rotationsbewegung in Richtung nach West zu; gelegentlich niedersinkend, erzeugen dieselben bei uns Sturm aus West. So ist das Studium der höheren Meteorologie von demjenigen der allgemeinen Bewegungsgesetze, insbesondere vom Studium der Wirkungen des Gesetzes der Flächen untrennbar.

d) Umformung von Rotation in Umlaufsbewegung benachbarter Gestirne durch die Flutwirkung.

Als Beispiel sei die Gruppe Mond–Erde hier behandelt. Zur Zeit, da der Mond noch aus Gasen bestand, war sein Umfang ein größerer als jetzt. Er möge sich in allen seinen Teilen mit

der Winkelgeschwindigkeit ω_1 um die Erde gedreht haben; seine Winkelgeschwindigkeit bei seiner Bewegung um die Sonne sei hier vernachlässigt, um die Darstellung einfacher zu gestalten.

Auf der dem Erdball zugekehrten Seite wirkt am Monde bei O_1 die Anziehungskraft A_1, bei O_2 hingegen die kleinere Anziehung A_2:

$$A_2 = A_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2.$$

Zu diesen Kräften kommt die für den Mond überall gleiche Zentrifugalkraft C hinzu, welche sich aus seiner Drehung (Revolution) um die Erde ergibt. Aus ihnen resultieren zunächst die Kräfte K_1 und K_2, welche die Erscheinung der Flutbildung erzeugen, und zwar in deren statischer Form (Fig. 41). Der Mond ist dann länglich geformt, die Achse O_1O_2 ist die größere.

Fig. 41.

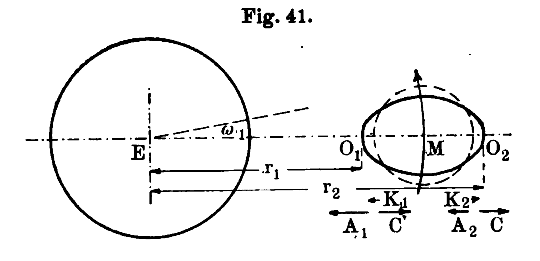


Fig. 42.

Nun beginne die Zusammenziehung des Mondes infolge seiner Erkaltung. Das führt nach dem Gesetz der Flächen zu einer Steigerung seiner Rotationsbewegung. Die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Mondes um seine Achse nimmt einen vergrößerten Wert ω an. Infolgedessen stellt sich seine in die Länge gezogene Achse $O_1 O_2$ schräg (siehe Fig. 42). Aus A_1 und C wie A_2 und C ergeben sich nun die Kräfte K_1 und K_2 in solcher Richtung, daß sie, ein Kräftepaar bildend, den Mond zurückzudrehen bestrebt sind, seine Winkelgeschwindigkeit ω vermindernd. Ferner aber ist $K_1 > K_2$, was eine Zunahme der Geschwindigkeit v_m des Mondes in seiner Bahn um den Schwerpunkt von Erde und Mond (man sagt gemeinhin um die Erde) zur Folge hat. Für die Erde führt das umgekehrt zu einer Vergrößerung der Drehung der Erde um

den gemeinsamen Schwerpunkt von Erde und Mond, da die Resultierende (R) von (A_1) und (A_2), die Kraftwirkung des Mondes in bezug auf die Erde, mit der Umlaufsgeschwindigkeit v_e der Erde um den gemeinsamen Schwerpunkt von Erde und Mond einen spitzen Winkel einschließt. So setzt sich die Arbeit, welche die Kräfte der Massenanziehung bei Erkaltung und Zusammenziehung des Mondes leisten, um in eine Zunahme der Umlaufsgeschwindigkeiten von Erde und Mond umeinander.

Am Monde haben sich nun die Verhältnisse so gestaltet, daß infolge der Größe der Erdmasse und der daraus sich ergebenden Größe des Momentes der Kräfte K_1 und K_2 der Mond keine Beschleunigung seiner Achsendrehung um sich selbst in bezug auf das Achsenkreuz Mond–Erde erreicht hat. Das Moment, welches infolge seiner Zusammenziehung auf Vermehrung der Winkelgeschwindigkeit seiner Drehung um seine eigene Achse gewirkt hat, blieb kleiner als das Moment der Kräfte K, so daß sich jeweils nur ein beschränkter Ausschlag ergab. Die Winkelgeschwindigkeit ω des Mondes um seine eigene Achse blieb daher dem ursprünglichen Werte ω_1, d. h. demjenigen seiner Drehung um die Erde, fast gleich; sie nahm nur insoweit zu, als die Revolution von Erde und Mond umeinander eine kleine Steigerung ihrer Winkelgeschwindigkeit erlitt. Jener Umstand hat zur Folge, daß der Mond auch jetzt noch dauernd die nämliche Seite O_1 der Erde zukehrt, so daß von der Erde aus wir von ihm nur diese Hälfte seiner Oberfläche zu sehen bekommen. Zu kleinem Betrage macht sich die seinerzeit erstrebte Schrägstellung seiner Langachse $O_1 O_2$ (vgl. Fig. 42) aber auch heute noch bemerkbar. Als die Abkühlung und Zusammenziehung fast aufhörte und das aus ihr sich ergebende Moment fast auf Null zurückging, folgte der Mond dem Moment der Kräfte K, die ursprüngliche Lage, in welcher E, O_1 und O_2 in einer geraden Linie liegen, wieder erstrebend (vgl. Fig. 42). In dieser Stellung angelangt, besaß er, wie ein sich bewegendes Pendel in der unteren Lage aufweist, noch Drehbewegung (im Bilde wie der Zeiger der Uhr) neben der Winkelgeschwindigkeit seiner Bahnbewegung. Infolgedessen schlägt er über die Gleichgewichtslage hinaus. Die Kräfte A_1 und A_2 rücken dann je auf die andere Seite der Linie $E—O_1—M—O_2$, A_1 nach oben, A_2 nach unten; sie drehen nun am Monde rückwärts, im Sinne von ω. So pendelt

die lange Achse des Mondes andauernd um die Linie *EM* etwas hin und her. Man nennt das seine Libration. Dieser Vorgang führt dahin, daß zeitweise von der einen, zeitweise von der anderen Rückseite des Mondes noch ein schmaler Streifen von der Erde aus zu beobachten ist.

Mit Zunahme der Umlaufsgeschwindigkeit der Gestirne Erde und Mond umeinander ist auch eine Störung ihrer Bahn, die ursprünglich eine dem Kreise sich mehr nähernde gewesen sein mag, verbunden gewesen. Eine elliptische Bahn mit zeitweiser Annäherung und zeitweiser Entfernung der beiden Himmelskörper voneinander zeigt sich uns jetzt.

Auch die Bewegung der Kometenschweife und deren wechselnde Stellung zum Radiusvektor des Kometen in bezug auf die Sonne mag mit Vorgängen der beschriebenen Art in Verbindung stehen.

An der Erde hat der kleinere Mond kein so großes, eine Drehung der Erde um sich selbst hemmendes Moment durch die Flutwirkung hervorbringen können. Daher hat die Rotation der Erde um ihre Achse im Lauf der langen Zeiträume seit Abtrennung des Mondes auf mehr als den 27,4 fachen Betrag ihres ursprünglichen Wertes zugenommen.

In der Meteorologie hat man sich bisher noch nicht bemüht, die Einwirkung der Flut- und Ebbekräfte auf die atmosphärischen Bewegungen theoretisch zu fassen. Ich glaube, daß da ein dankbares Arbeitsfeld noch vorliegt.

C. Polflucht aller über die Erdoberfläche hervorragenden Massen.

Bei den vorstehend betrachteten Vorgängen näherten sich die Massen während ihrer im ganzen stattfindenden Abkühlung der Achse des betreffenden Himmelskörpers, dabei nach dem Gesetz der Flächen an Drehung um diese Achse zunehmend. In einem Gegensatz dazu haben die Wirkungen derjenigen Massen der Erde gestanden, welche bei ihrer Erkaltung und Erstarrung, einzelne große Schollen bildend und an Volumen zunehmend, aus den noch flüssigen und dichter verbliebenen Massen sich herausgehoben haben. Für sie hat während der Hebung ihres Schwerpunktes und dessen Entfernung von der Erdachse die Winkel-

geschwindigkeit der Rotation abgenommen, um ein Weniges hinter derjenigen des umgebenden Mittels zurückbleibend. Dabei haben diese schwimmenden Massen vorübergehend nach Westen gedrängt, auch waren sie nach erlangter Geschwindigkeit zunächst bestrebt, der Trägheitskurve zu folgen. Alsbald mußte aber der Bewegungswiderstand, welchem sie dabei ausgesetzt gewesen sind, eine Anpassung ihrer Winkelgeschwindigkeit an diejenige der vor- und untergelagerten Massen bewirken, so daß ihre Winkelgeschwindigkeit nun derjenigen der ganzen Erde wieder entsprochen hat. Die Kraftwirkungen, welche nach Vollzug dieses Ausgleiches sich für die gehobenen Massen ferner noch ergeben, bilden den Gegenstand nachfolgender Untersuchung. Dieselbe handelt von der Ausbildung der Niveauflächen; sie wertet diese aus. Es sei daher hier auf Teil VII, 1 e verwiesen, welcher auch die Niveaufläche, und zwar die infolge der Erdrotation abgeplattete Erdoberfläche behandelt.

1. Entstehung der Polflucht über die Erdoberfläche (Niveaufläche) emporragender Körper.

Durch die Arbeit von A. Wegener[1]) über die Bildung der Kontinente und Gebirge und eine mit W. Köppen gepflogene mündliche Unterhaltung angeregt, ist von mir im Oktober 1920 nachstehende Betrachtung angestellt. Es gilt, die Kraft zu ermitteln, mit welcher eine in Flüssigkeit schwimmende, im oberen Teil aus ihr hervorragende oder eine auf der Erdoberfläche auflagernde Masse das Bestreben, „äquatorwärts zu treiben“, besitzt, weil die Erdoberfläche nur für ein Massenteilchen P in derselben, nicht aber für Massenteile über oder unter derselben eine Niveaufläche bildet.

Unter dem Einfluß von Zentrifugalkraft K_z und Erdanziehung A nehmen die Schwerkraft S und die Beschleunigung der Schwere g bekanntlich die in Fig. 43 dargestellten Richtungen an, für Punkte höherer Lage mehr äquatorwärts weisend, so daß die Niveauflächen verschiedener Höhenlage nicht parallel zueinander verlaufen. Ein auf der Niveaufläche NN aufliegender Körper empfängt nun von dieser her die Auflagerreaktion R (Fig. 44), der Richtung nach entgegengesetzt derjenigen von S

[1]) Die Entstehung der Kontinente (Peterm. Mitt. 1912 u. 1920, sowie Sammlung Vieweg 23 vom Jahre 1915).

oder g, in P (Fig. 43) auftretend, hingegen in seinem höher belegenen Schwerpunkt P_1 (Fig. 44) durch sein Gewicht den Abtrieb G_1, der Richtung nach dem mehr äquatorwärts weisenden Werte g_1 am Orte P_1 (Fig. 43) entsprechend. Daher setzen sich R und G_1 zu einer äquatorwärts treibenden Kraft K_1 zusammen (vgl. Fig. 44), deren Wert hier zu ermitteln ist.

Der Winkel, welchen G_1 und R (Fig. 44) bilden, hängt von der Veränderlichkeit der Richtungen von A (Anziehungskraft der Erde) und K_z (Zentrifugalkraft) ab (Fig. 43). A ändert bei dem Übergang zu unendlichen Höhen seine Richtung nur um einen begrenzt kleinen Betrag (etwa in Hälfte des Winkels, um welchen die Erdoberfläche dort von der Kugelform abweicht), während K_z bis zu unendlicher Höhe auf den Wert unendlich zunimmt, so daß die Variation der Zentrifugalkraft K_z hier ausschlaggebend ist. Infolge dieses Umstandes besteht die Berechtigung, als erste Annäherung die Veränderlichkeit der Richtung von A außer acht zu lassen[1]).

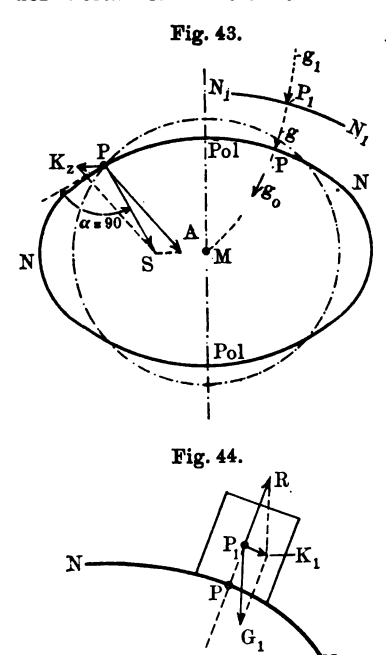


Fig. 43.

Fig. 44.

Unter der nun gemachten Annahme, daß die Anziehungskraft A der Erde der Richtung nach bei P_1 dieselbe ist wie bei P (Fig. 43 und 45), liegt das Auftreten einer äquatorwärts treibenden Kraft nur noch in dem Umstande, daß in P_1 die Zentrifugalkraft K_z größer ist als in P. Zunächst sei der Mehrbetrag der ganzen Zentrifugalbeschleunigung Δp berechnet, woraus sich die horizontal äquatorwärts treibende Beschleunigung

[1]) Köppen weist darauf hin, daß der Einfluß einer Veränderlichkeit des Größenwertes von A nach der Höhe in gleichem Sinne wirkt wie die Veränderlichkeit der Zentrifugalkraft, so daß die hier zum Schluß gefundenen Werte der Polflucht sich vielleicht noch um einen wesentlichen Betrag erhöhen könnten.

zu $\Delta p_1 = \Delta p \sin \varphi$ berechnet (vgl. Fig. 46). Es mißt die Zentrifugalbeschleunigung in P:

$$p = \frac{v^2}{r},$$

worin r die lineare Geschwindigkeit eines Punktes des Breitkreises vom Radius r bedeutet; $v = r\omega$ gesetzt, ergibt:

$$p = r\omega^2 \quad \text{in Punkt } P$$

und

$$p + \Delta p = (r + \Delta r)\,\omega^2 \quad \text{in Punkt } P_1.$$

Fig. 45.

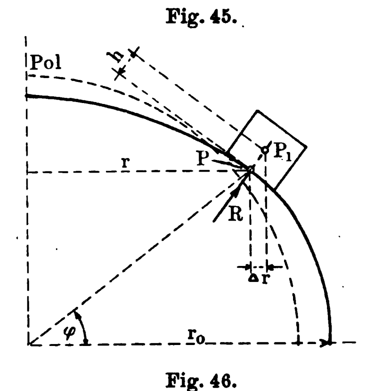
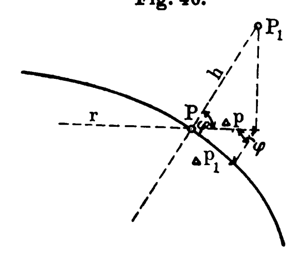


Fig. 46.



Der Unterschied beider Werte ruft äquatoriale Beschleunigung hervor. Es wird:

$\Delta p = \Delta r\,\omega^2;\quad \Delta r = h \cos \varphi$
(vgl. Fig. 46),

$\Delta p = \cos \varphi\, h\, \omega^2$ und $\Delta p_1 = \Delta p \sin \varphi$
(vgl. Fig. 46),

(Gl. 115) $\boldsymbol{\Delta p_1 = \sin \varphi \cdot \cos \varphi\, h\, \omega^2}$

äquatorwärts treibende Beschleunigung als horizontale Komponente des Mehrbetrages an Zentrifugalbeschleunigung in P_1 gegenüber P.

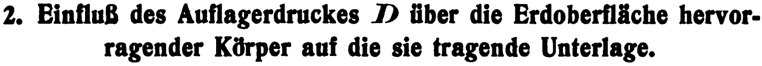
Für den Sonderfall $\varphi = 45^0$ erreicht $\Delta p_1 = {}^1/_2\, h\, \omega^2$ seinen Meistwert.

Für $\varphi = 0$ oder $\varphi = 90^0$ wird $\Delta p_1 = 0$.

Die äquatorwärts treibende Kraft mißt:

(Gl. 116) $K_1 = m\,\Delta p_1$.

Mit jener Beschleunigung Δp_1 oder Kraft K_1 strebt jeder sich über die Erdoberfläche erhebende Körper dem Äquator zu, er würde auf der horizontalen Erdoberfläche bei fehlender Reibung dem Äquator zugleiten, weil jene nur für materielle Punkte, in ihr belegen, eine Niveaufläche darstellt, nicht aber für höher belegene Massen.



2. Einfluß des Auflagerdruckes D über die Erdoberfläche hervorragender Körper auf die sie tragende Unterlage.

Der Normaldruck oder Auflagerdruck D eines auf der Erdoberfläche auflagernden Körpers (vgl. Fig. 47) steht nur normal

zur Niveaufläche N–N, welche für ihn die Auflagerfläche bildet; er weicht aber gegen die Normale (siehe g_0, Fig. 47) zu einer tiefer liegenden Niveaufläche N_0–N_0 zum Äquator hin ab, so daß D die unten lagernde Schicht äquatorwärts zu verschieben trachtet, denn es ist diese, zwischen N–N und N_0–N_0 belegen, von unten her durch die Auflagerreaktion R_0 beeinflußt, welche in Richtung $-g_0$ verläuft und mit D einen Winkel einschließt. Dieser Umstand ist für die nachstehende Betrachtung von Bedeutung, welche sich auf die äquatorwärts treibende Kraft schwimmender, sowohl eintauchender als zugleich über die Erdoberfläche emporragender Massen bezieht.

Fig. 47.

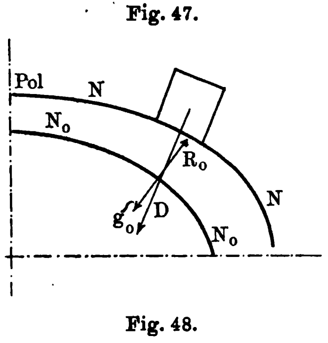
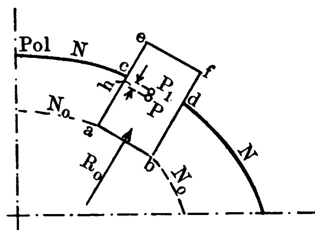


Fig. 48.



3. Die Polflucht schwimmender, mit ihrem Oberteil über das umgebende Mittel emporragender Massen.

Bei dem Erstarren einer zuvor flüssigen Masse *abcd* verliere dieselbe an Dichte (an Raumeinheitsgewicht); sie nehme hernach den größeren Raum *abef* ein (vgl. Fig. 48). Der Druck der umschließenden Flüssigkeit auf die im Schnitt als *ac*, *ab* und *bd* erscheinenden Flächen ist dabei unverändert geblieben, wie er vor der Erstarrung war. Geändert hat sich aber die Lage des Schwerpunktes der Masse gegenüber der vor der Erstarrung; er lag vorher in P und liegt nun in P_1. Der Höhenunterschied von P und P_1 ist maßgebend für die Polflucht der schwimmenden Scholle. Es hat hier h die nämliche Bedeutung wie in Fig. 45 und 46, und zwar ist h gleich der Hälfte des Betrages, um welchen eine ebene Scholle über das Niveau des umgebenden Mittels emporragt. Während dort aber im Abschnitt 1 für die Größe der äquatorwärts treibenden Kraft nur die Masse des auf der Erdoberfläche lagernden Körpers für dessen Polflucht in Frage kam, gelangt hier die im Abschnitt 2 bezeichnete äquatorwärts weisende Komponente des Auflagerdruckes D (Fig. 47) mit

zur Auswertung, indem der Schwimmkörper von unten her die Auflagerreaktion R_0, normal zu N_0–N_6 gerichtet, empfängt (vgl. Fig. 47 und 48).

Wie unter 1. ermittelt, ist die Größe der äquatorwärts treibenden Beschleunigung wieder:

$$\Delta p_1 = \sin\varphi \, . \cos\varphi \, h \, \omega^2 \quad \text{(vgl. Gl. 115)},$$

und diejenige der treibenden Kraft einer ganzen Scholle:

$$\text{(Gl. 116a)} \qquad K_1 = m \Delta p_1 \quad \text{(vgl. Gl. 116)},$$

nur daß nun nicht allein als Masse der über die Erdoberfläche hervorragende Teil (vgl. Fig. 44, hier der Teil *cdef* in Fig. 48) in Frage kommt, sondern die Masse des ganzen Schwimmkörpers *abef*. In K_1 ist dabei der äquatorwärts treibende Teil des Auflagerdruckes D von *abcd* (vgl. Fig. 47) und derjenige der Masse von *cdef* auf die Niveaufläche NN (Fig. 48) mit eingeschlossen.

Beispiel. In der Arbeit von A. Wegener wird jener Kraft K_1 eine große Bedeutung für die Gestaltung der Erdkruste zur Zeit der Bildung fester Schollen aus der zuvor flüssigen Masse zugewiesen, wie auch durch den Umstand bedingt, daß das leichtere Gestein (Sal) in dem schwereren Gestein (Sima) gleichsam schwimmt und über dieses im Mittel um etwa 4,8 km hervorragt, so daß für jene leichteren, die Kontinente bildenden Erdschollen die Lage des Schwerpunktes P_1 um $h = \frac{4{,}8}{2} = 2{,}4$ km gegenüber der Lage des Schwerpunktes P des umgebenden Mittels der Sima gehoben ist.

Gegeben sei nun eine Kontinentalscholle von 5000 km meridionaler Erstreckung, deren Mitte etwa in der Breite $\varphi = 45^0$ sich befindet und für welche im Mittel $\sin\varphi \cos\varphi$ den Wert $1/4$ haben mag. Für sie wird:

$$\Delta p_1 = 1/4 \, h \omega^2 = 1/4 \, . \, 2{,}4 \, \text{km} \, \omega^2 \quad \text{(vgl. Gl. 115)}.$$

Aus der Geschwindigkeit der Drehung der Erde am Äquator von $v_0 = 464$ m sek und unter Annahme des Erdradius daselbst zu $r_0 = 6\,377\,000$ m ermittelt, findet sich:

$$\omega = \frac{v_0}{r_0} = \frac{464 \text{ m sek}^{-1}}{6\,377\,000 \text{ m}} = 0{,}727 \, . \, 10^{-4} \, \text{sek}^{-1}$$

und

$$\omega^2 = 0{,}53 \, . \, 10^{-8} \, \text{sek}^{-2}.$$

Mithin würde nach vorstehendem:

$$\varDelta p_1 = \tfrac{1}{4} . 2{,}4 . 10^8 \mathrm{m} . 0{,}53 . 10^{-8} \mathrm{sek}^{-2} = \varDelta p_1 = 0{,}318 . 10^{-5} \mathrm{m\,sek}^{-2}.$$

Zeigt nun die Scholle von 5000 km meridionaler Abmessung und von 3000 km Breite eine Stärke von 100 km und ein Raumeinheitsgewicht von 2,6 $\mathrm{t\,m^{-3}}$ (t Tonne = 1000 kg), dann findet sich deren Masse bei $g = 9{,}81\ \mathrm{m\,sek^{-2}}$ gerechnet zu [1]):

$$m = \frac{5 . 10^6 . 3 . 10^6 . 1 . 10^5 . \mathrm{m}^3\ 2{,}6\ \mathrm{t\,m}^{-3}}{9{,}81\ \mathrm{m\,sek}^{-2}} = 3{,}98 . 10^{17}\ \mathrm{t\,m^{-1}\,sek^2},$$

und nach Gl. 116a, S. 107:

$$K_1 = m \varDelta p_1 = 3{,}98 . 10^{17} . 0{,}318 . 10^{-5}\ \mathrm{t\,m^{-1}\,sek^2\,m\,sek^{-2}},$$

$$K_1 = 1{,}26 . 10^{12}\ \mathrm{t}. \text{ [2])}$$

Die ermittelte Kraft ist außerordentlich groß; sie verteilt sich aber auf eine Berührungsfläche bedeutender Ausdehnung, wenn von der einen Erdhälfte her eine derartige Scholle gegen den Äquator hin auf eine solche Scholle gleicher Größe der anderen Hemisphäre drücken würde. Um eine Vorstellung von einer solchen Wirkung zu gewinnen, sei die Größe der Berührungsfläche F ermittelt, gerade ausreichend, um ein Gestein von der Druckfestigkeit des Granits, also etwa von 2 $\mathrm{t\,cm^{-2}}$ Festigkeit, durch jene Kraft bei zentrischem Druck fast zur Zertrümmerung zu bringen. Es besteht dann die Gleichung, F in km² ausgedrückt, so daß die Fläche in cm² mißt: $F . 100\,000^2\ \mathrm{cm}^2$,

$$F . 10^{10}\ \mathrm{cm}^2 . 2\ \mathrm{t\,cm}^{-2} = 1{,}26 . 10^{12}\ \mathrm{t},$$

$$F = 63\ \mathrm{km}^2.$$

Berühren zwei derartig große Schollen sich nur mit ihren Rändern, so daß die Übertragung des Druckes auf kleinerer Fläche, als oben ermittelt, sich ergibt, dann folgt daraus eine Zertrümmerung des Gesteins. Darauf führt die vorn benannte Schrift von A. Wegener die Entstehung von Gebirgszügen zurück,

---

[1]) Über die hier verwendeten technischen Dimensionen siehe S. 26 und 27.

[2]) Dieses Ergebnis „K_1 = 1260 Milliarden Tonnen" führte Professor Dr. h. c. Wold. Köppen, welchem ich meine Arbeit im Manuskript vorgelegt hatte, am Schluß seiner Abhandlung: „Zur Paläoklimatologie" (Meteorol. Zeitschr., Jahrg. 1921, S. 97—101) an. Daselbst ist gesagt: „Das Maß der Kraft berechnet M. Möller für eine Kontinentalscholle, deren Abmessungen 5000 × 3000 × 100 km seien, zu 1260 Milliarden Tonnen."

mit der Bildung erhöhter Ränder im Strom treibender und einander drückender Eisschollen vergleichbar. Zudem ist noch zu beachten, daß bei exzentrischem Druck Biegungsspannungen entstehen und das Bestreben der Körperteile, nach oben, nach unten oder seitwärts auszuweichen sowie zu brechen, aus ihnen folgt.

VI. Beziehungen zwischen Druckhöhe und Spannung zu Ausflußgeschwindigkeit und Reaktion.

Sehr viele Aufgaben über Bewegungsvorgänge lassen sich in bequem übersichtlicher Weise unter Benutzung des Begriffs der Druckhöhe lösen.

1. Die Druckhöhe und die Austrittsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit.

a) Austritt in den freien Raum (Fig. 49).

Das Gewicht der Raumeinheit einer Flüssigkeit sei γ (Dimension $kg\,m^{-3}$), die Pressung oder Spannung σ, dann besteht die Beziehung:

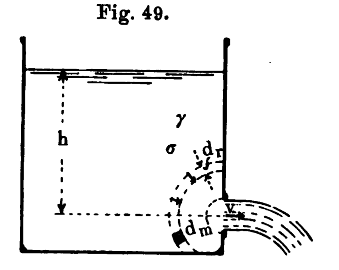
(Gl. 117) $\sigma = \gamma . h$ (Dimension $kg . m^{-3} . m = kg . m^{-2}$),

(Gl. 118) $h = \frac{\sigma}{\gamma}$ (Dimension $\frac{kg . m^{-2}}{kg . m^{-3}} = m$),

(Gl. 119) $v = \sqrt{2gh}$ (Dimension $\sqrt{m . sek^{-2} . m} = m . sek^{-1}$).

Das ist die Austrittsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit, wenn man Reibungswiderstände und andere störende Einflüsse vernachlässigt (vgl. Gl. 62, S. 61).

Fig. 49.



Es ergibt sich diese Beziehung wie folgt. Es bewegen sich unter Beschleunigung die Flüssigkeits- und Massenteilchen dm radial auf die Öffnung hin. Die beschleunigende äußere Kraft für ein Massenelement dm mit der Querschnittsfläche df ist:

(Gl. 120) $dK = df . (-d\sigma)$;

darin bedeutet $d\sigma$ die Differenz im Potential vor und hinter dem Massenteilchen, und zwar eine Abnahme, so daß $d\sigma$ negativ ausfällt.

Dabei ist $-d\sigma$ das Differential der Spannungsabnahme, welche ein Wasserteilchen bestimmter Höhenlage infolge des Überganges aus der Ruhe in den Zustand der Bewegung erfahren hat; das Differential seiner Druckhöhe mißt $-d.h = -\frac{d\sigma}{\gamma}$.

Die Masse dm bestimmt sich zu $dm = \frac{G}{g} = \frac{\gamma.df.dr}{g}$.

Die Beschleunigung des Teilchens mißt, da $\frac{dv}{dt} = \frac{K}{m}$ nach Gl. 27a, hier

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dK}{dm} = -\frac{df.d\sigma}{\gamma.df.dr}\cdot g = -\frac{g}{\gamma}\cdot\frac{d\sigma}{dr}.$$

Für den zurückgelegten Weg $s = dr$ können wir setzen $dr = v.dt$. Es wird

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{\gamma}\cdot\frac{d\sigma}{vdt},$$

(Gl. 120a) $$vdv = -\frac{g}{\gamma}\cdot d\sigma,$$

(Gl. 121) $$\int_0^v vdv = -\frac{g}{\gamma}\int_{\sigma=\sigma}^{\sigma=0} d\sigma,$$

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{g}{\gamma}\cdot[0-\sigma] = \frac{g}{\gamma}\sigma,$$

(Gl. 122) $$v = \sqrt{2g\frac{\sigma}{\gamma}}$$

oder, da $\frac{\sigma}{\gamma} = h$: $\quad v = \sqrt{2gh}$ (wie Gl. 119).

b) Austritt in einen mit Flüssigkeit vom Einheitsgewicht γ' erfüllten Raum.

In Fig. 49 war der das Gefäß umgebende Stoff als gewichtslos angenommen. Ist obiges nicht der Fall, besitzt die Flüssigkeit das Einheitsgewicht γ und diejenige außerhalb des Gefäßes γ' (siehe Fig. 50, dort aber außen γ' anstatt γ zu lesen), dann ändert

sich die obere Grenze der Integration. Es tritt an die Stelle der Spannung 0 an der Öffnung die Spannung σ' und es wird:

(Gl. 123) $$\frac{v^2}{2} = -\frac{g}{\gamma}[\sigma' - \sigma],$$

(Gl. 123a) $$v = \sqrt{2g\frac{\sigma - \sigma'}{\gamma}}$$

und für σ' gesetzt $\sigma' = \gamma'.h'$, für σ gesetzt $\sigma = \gamma.h$,

(Gl. 124) $$v = \sqrt{2g\cdot\frac{1}{\gamma}(\gamma.h - \gamma'h')}.$$

Das ist z. B. bei dem Austritt von salzhaltigem, schwererem Wasser in leichteres Süßwasser zu beachten.

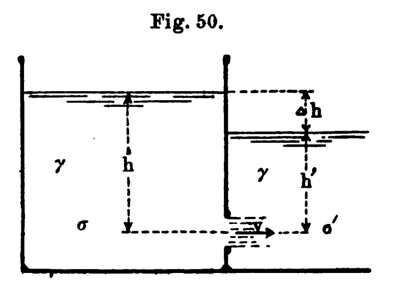
c) Ausfluß unter der Druckhöhe h in eine Flüssigkeit gleicher Dichte, aber geringerer Druckhöhe h' (s. Fig. 50).

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{g}{\gamma}[\gamma h' - \gamma h]$$

$$v = \sqrt{2g(h - h')}$$

(Gl. 125) $$v = \sqrt{2g\Delta h}.$$

Fig. 50.



2. Größe der Reaktion eines aus einer Gefäßöffnung austretenden Flüssigkeitsstrahles, für den Beharrungszustand des Vorganges ermittelt.

a) Austritt ohne Düse.

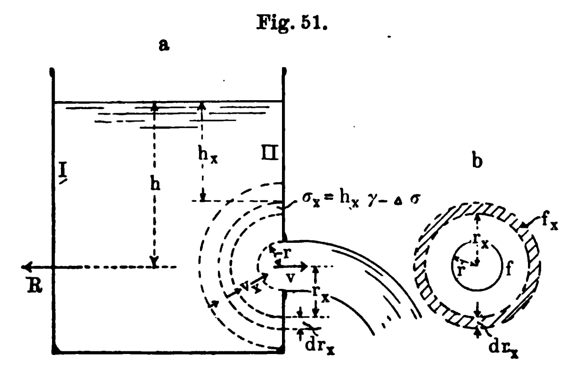
Aus dem in Fig. 51 dargestellten Gefäß tritt mit der Geschwindigkeit v ein Flüssigkeitsstrahl, z. B. ein Wasserstrahl aus. Es sei die nicht genau zutreffende Annahme gemacht, daß der Ausfluß in der nebenstehend angedeuteten, geordneten Weise geschieht. Nebenerscheinungen und Vorgänge wie Kontraktion und Reibungseinwirkungen seien vernachlässigt. Es gilt, den nur theoretisch richtigen Wert der Reaktion zu bestimmen, welcher sich einstellen würde, wenn sowohl in der Öffnung vom Querschnitt f als auch in der nach einwärts sich darüber wölbenden Halbkugeloberfläche vom Radius r keine Pressung mehr besteht.

Die Reaktion, welche das Gefäß erleidet, wird dadurch herbeigeführt, daß die Flüssigkeit, hier das Wasser, gegen die Wand I

zu vollem Betrage überall der Druckhöhe entsprechend drückt, während die Wand II jeweils in gleicher Höhe von einer um $\Delta\sigma$ kleineren Druckspannung betroffen wird. Außerdem fehlt am Ort der Öffnungsfläche f die Wand, so daß hier der ganze Druck, welchen die Wassersäule der Höhe h bei fehlender Öffnung dort äußern würde und auf die geschlossene Wand gegenüber in Richtung R wirklich äußert, für Wand II fortfällt, und das zwar zum Betrage: $\sigma f = \gamma . h . f$.

Es wird nun nachgewiesen, daß bei hinreichender Größe der Wandfläche, im Wandteil rings um Öffnung f verstanden, der

Fig. 51.



Druck gegen Wandfläche II auch wieder um den nämlichen Betrag kleiner ausfällt, als der Druck, der die Wand I gegenüber trifft, so daß die ganze Reaktion sich aus zwei Teilen R_α und R_β von gleicher Größe zusammensetzt; es wird:

(Gl. 126) $\qquad R = R_\alpha + R_\beta$.

α) Hierin ist R_α, wie schon erörtert, leicht zu ermitteln; es wird:

(Gl. 127) $\qquad R_\alpha = \gamma . h . f$ oder da $v = \sqrt{2gh}$ und $h = \frac{v^2}{2g}$

(Gl. 128) $\qquad R_\alpha = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{v^2}{2} \cdot f$.

β) Der zweite Teilbetrag R_β berechnet sich durch Integration. Das Wasser strömt in dem Gefäß am Ort der größten Kugelschale mit der Geschwindigkeit $v_x = 0$ der Öffnung zu, seine Geschwindigkeit gegen die Öffnung hin steigernd bis zum Werte v an der Oberfläche der Kugelschale vom Radius r, welche über der Öffnung sich wölbt. Die Geschwindigkeitszunahme ist durch

die Abnahme des Druckes gegen die Öffnung hin bedingt; es sei diese Spannungsabnahme für die Kugelschale vom Radius r_x genannt $\Delta_x \sigma$. Bei regelmäßigem Verlauf des Vorganges hat diese Spannungsabnahme auf der zugehörenden Kugeloberfläche vom Radius r_x überall gleichen Wert. Die Kugelschalen schneiden die Wand II in Kreisen, von denen zwei, im Abstande dr voneinander liegend, in Fig. 51 b rechts herausgezeichnet sind.

Die dort schraffiert gezeichnete Ringfläche f_x wird nach vorstehendem nun überall vom Unterdruck $\Delta_x \sigma$, d. h. von dem Unterschied zwischen dem Druck der Ruhe und dem des Zustandes der Bewegung beeinflußt, so daß wird:

(Gl. 129) $$d R_{\beta_x} = \Delta_x \sigma . d f_x;$$

$d f_x = 2 r_x \pi . (-d r_x)$ gesetzt, gibt:

(Gl. 130) $$d R_{\beta_x} = \Delta_x \sigma \, 2 r_x \pi (-d r_x).$$

Da die Werte von r_x gegen die Öffnung hin abnehmen, wird $d r_x$ hier negativ, daher $(-d r_x)$ zu schreiben ist.

Nach Gl. 123, S. 111, ist:

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{g}{\gamma}(\sigma' - \sigma);$$

hier ist $\sigma' - \sigma = -\Delta_x \sigma$ (negativ, da die Pressung abnimmt).

Bei $v = v_x$ wird:

$$\frac{v_x^2}{2} = \frac{g}{\gamma} \Delta_x \sigma \quad \text{und} \quad \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{v_x^2}{2} = \Delta_x \sigma.$$

Das in Gl. 130 eingesetzt, ergibt:

(Gl. 131) $$d R_{\beta_x} = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{v_x^2}{2} \cdot 2 r_x \pi . (-d r_x).$$

Nun durchfließt eine gleiche Wassermenge alle Halbkugelschalen-Oberflächen; es ist also auch:

(Gl. 132) $$v_x . f_x = v . f.$$

Darin bedeutet f die letzte Halbkugelschale, welche sich über die Öffnung vom Radius r wölbt. Es wird:

$$v_x . 2 . r_x^2 \pi = v . 2 r^2 \pi,$$

$$v_x . r_x^2 = v . r^2.$$

(Gl. 133) $$v_x^2 = \frac{v^2 . r^4}{r_x^4};$$

das in Gl. 131 eingesetzt, gibt:

$$d R_{\beta_x} = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{v^2 . r^4}{2} \cdot \frac{2 r_x \pi (-d r_x)}{r_x^4} = \frac{\gamma}{g} \cdot v^2 r^4 \pi \cdot \frac{(-d r_x)}{r_x^3},$$

(Gl. 134) $$R_{\beta_x} = \frac{\gamma}{g} v^2 . r^4 \pi \int \frac{(-d r_x)}{r_x^3}; \qquad \int \frac{(-d r_x)}{r_x^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r_x^2},$$

$$R_\beta = \frac{\gamma}{g} \cdot v^2 \cdot r^4 \pi \Bigg|_{r_x = \infty}^{r_x = r} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r_x^2}$$

$$= \frac{\gamma}{g} \cdot v^2 . \, r^4 \pi \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{\infty^2} \right)$$

$$= \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{v^2}{2} \cdot \frac{r^4 \pi}{r^2}$$

(Gl. 135) $$R_\beta = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{v^2}{2} \cdot r^2 \pi;$$

$r^2 \pi = f$ gesetzt, findet sich

(Gl. 136) $$R_\beta = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{v^2}{2} \cdot f.$$

Es wird also im ganzen (vgl. Gl. 126):

$$R = R_\alpha + R_\beta = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{v^2}{2} \cdot f + \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{v^2}{2} \cdot f.$$

(Gl. 137) $$\boldsymbol{R = \frac{\gamma}{g} \cdot v^2 . f.}$$

Auf sehr viel schnellerem und einfacherem Wege ist diese Gleichung vorn unter Anwendung des Gesetzes über die Beziehung zwischen Kraft und Bewegungsgröße schon abgeleitet (siehe Gl. 49a, S. 43); durch die oben angestellten, auf die Einzelheiten des Ausflußvorganges eingehenden Betrachtungen und durch die daran angeknüpften Berechnungen vertieft sich aber die Vorstellung über das Zustandekommen der Reaktion wesentlich.

Man kann auch schreiben: $v = \sqrt{2 g h}$ (siehe Gl. 119, S. 109) oder $v^2 = 2 g h$, dann wird aus Gl. 137

(Gl. 137a) $$R = \frac{\gamma}{g} \cdot 2 g . h . f = 2 \gamma . h . f$$

und da $\gamma . h = \sigma$,

(Gl. 137b) $$\boldsymbol{R = 2 \sigma . f} \quad \text{(vgl. Gl. 50, S. 44).}$$

Die Ausdrücke sind die nämlichen, es ist dort der Flächeneinheitsdruck, die Spannung, nur anders, und zwar p, hier σ benannt.

Das gewonnene Ergebnis bietet aber nur eine Annäherung, denn es ist in Wirklichkeit in der Öffnung vom Querschnitt f die Geschwindigkeit noch nicht $v = \sqrt{2gh}$, sondern kleiner. Die sowohl von vorn wie auch von allen Seiten der Öffnung zuströmenden Wassermengen (siehe Fig. 51, S. 112) stauen sich dort; sie rufen einen Druck hervor, welcher den der Rechnung zugrunde gelegten Vorgang stört und dahin wirkt, daß in der Öffnung selbst v noch nicht seinen vollen Wert $v = \sqrt{2gh}$, sondern erst etwas später, etwa am Ort der größten Einschnürung (Kontraktion) des Strahles erreicht.

Versteht man hingegen, wie oben, unter f den Querschnitt der Öffnung, dann wird:

$$R = R_\alpha + R_\beta \text{ hier:}$$

$$R = \gamma . h . f + R'_\beta .$$

Darin ist R'_β kleiner als $\gamma h f$, da in der Öffnung der Wasserdruck noch nicht auf den Außenwert Null gesunken ist, und daher auch die Wandflächen der Wand II nicht so kleine Pressungen erhalten, wie in der theoretischen Ableitung vorausgesetzt ist. Die dort gemachte Annahme, daß an der Oberfläche der letzten Halbkugel vom Radius r schon der Druck Null herrscht, trifft wegen des oben erwähnten Stauvorganges, der nahe vor und in der Öffnung statthat, nicht ganz zu. Siehe ferner unter b den Reibungsverlust.

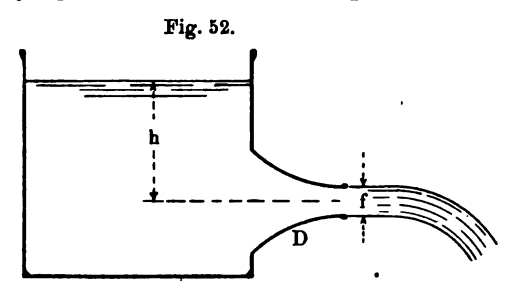
Der Wirklichkeit genau entsprechend, ist nur die Ableitung S. 42, Gl. 49, welche sich auf das Gesetz über die Erhaltung der Bewegungsgröße stützt, wobei in der Gleichung $R = \frac{\gamma}{g} v^2 . f$ bedeutet: f den Querschnitt des austretenden Wasserstrahles dort, wo im Strahl kein Überdruck, d. h. der relative oder kurz gesagt der Druck „Null“ herrscht, und v die Wassergeschwindigkeit daselbst. Ist diese an den verschiedenen Punkten des Querschnittes verschieden groß, dann wird:

$$R = \frac{\gamma}{g} \int v_x^2 . df.$$

b) Austritt bei vorhandener Düse ohne Berücksichtigung des Reibungswiderstandes.

Störende Stoßvorgänge, welche zu Querbewegungen und Verlusten führen, werden bei Anbringung eines allmählichen Überganges von weiten Austrittsquerschnitten zu der engeren äußeren Öffnung vom Querschnitt f fast ganz vermieden. Das führt zur Konstruktion der Düse D (Fig. 52).

Fig. 52.



Hier gelten die Gleichungen 137a:

$$R = 2\gamma h . f$$

oder 137b:

$$R = 2\sigma f \text{ (S. 114)},$$

fast genau, wenn man für f den Querschnitt der Düsenendöffnung setzt, da hinter ihr die Kontraktion des Strahles verschwindend klein ausfällt.

c) Dasselbe mit Berücksichtigung des Reibungswiderstandes.

Durch die Wirkung der Reibung findet eine geringe Verminderung der Ausflußgeschwindigkeit statt, daher fällt in Wirklichkeit die Reaktion noch etwas kleiner aus, als die Gleichungen 137a und b angeben. Im Ingenieurwesen pflegt man den durch Reibung erzeugten Verlust als Druckhöhenverlust Δh auszudrücken. Unter Berücksichtigung der Reibung wird dann also beim Vorhandensein einer Düse:

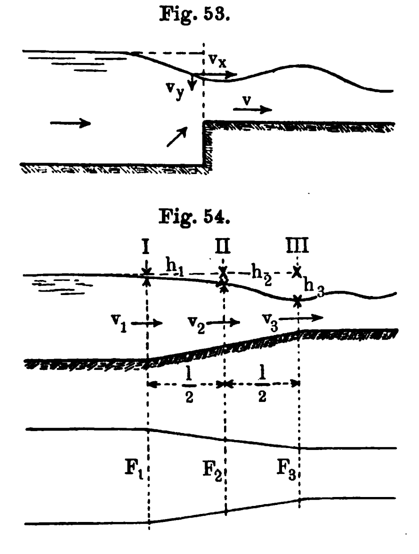
(Gl. 137c) $$R = 2\gamma(h - \Delta h)f.$$

Die Größe von Δh wird durch Versuche bestimmt.

d) Der Austritt bei offener Oberfläche.

α) Ohne Düse. Der Wasserspiegel senkt sich infolge des Wasseraustrittes gegen die Öffnung hin, und zwar recht plötzlich infolge des sprunghaften Überganges vom großen zum kleinen Stromquerschnitt. In der Öffnung besitzt das Wasser der Oberfläche eine horizontale Geschwindigkeit v_x und eine sinkende

Bewegung mit der Geschwindigkeit v_y. Von unten bewegen sich Wassermengen schräg aufwärts nach der Öffnung zu. Beide Querbewegungen, insbesondere die nahe der Oberfläche fallende Bewegung der Wassermassen führt unterhalb der Öffnung zur Entstehung von Wellengebilden, denn die Querbewegung führt zur Entstehung von Querschwingungen im Wasser, in vertikaler Ebene sich vollziehend, die im Verein mit der Horizontalbewegung des Wassers jene Wellen erzeugen.



β) Dasselbe mit Düse. Wo derartige Wellen störend wirken, pflegt man den Übergang durch Vorbau einer Art Düse sanfter zu gestalten, indem man die Sohle nach der Öffnung zu ansteigen läßt und außerdem auch im Grundriß die Einengung allmählich vornimmt. Man pflegt aber im Bauingenieurwesen dabei meist geradlinige Übergänge zu wählen, welche den zu stellenden Anforderungen jedoch noch nicht entsprechen. Das geschieht z. B. bei Wehröffnungen, welche der Flößerei dienen. Als Beispiel sei das Trommelwehr[1]) im Main bei Frankfurt a. M. genannt. Trotz obiger Maßnahme entstehen bei geöffneter Klappe im Ablauf, wenn kein Floß durchgelassen wird, Wellen von fast 80 cm Höhe. Vor Jahren berichtete mir der Wehrwärter dort, daß diese Wellen, welche beim Durchlassen eines Floßes sich zwar wesentlich schlichten, an den Teilen, den Gesperren desselben so auf und ab zerrend wirken, daß sich deren Verband lockert. Bei Reinigung der unteren Wehrkammer fänden sich dort bisweilen ganze Hände voll Nägel, welche aus den die Gesperre miteinander vereinigenden Verbandgliedern durch jene Bewegungen herausgerissen seien.

---

[1]) Max Möller: Grundriß des Wasserbaues, Bd. II, S. 248 u. f. Verlag von S. Hirzel, Leipzig.

Will man hier die Wellenbildung wirksam bekämpfen, dann gilt es unmittelbar vor der Öffnung ein steiles Abfallen des Wasserspiegels zu verhüten; denn die Höhe der entstehenden Welle wächst mit dem Quadrate der Vertikalkomponente der Geschwindigkeit, d. h. mit v_y^2.

In Fig. 54 verhalten sich die Durchflußquerschnitte $F_1:F_2:F_3$ nun aber etwa wie $6:3:1$,

die Geschwindigkeiten etwa $v_1:v_2:v_3 = 1:2:6$,
die ganzen Druckhöhenverluste $h_1:h_2:h_3 = 1^2:2^2:6^2 = 1:4:36$,
sowie die Teilverluste $(h_3-h_2):(h_2-h_1) = (36-4):(4-1) = 32:3$.

Das Gefälle im zweiten Abschnitt ist also nicht gleich demjenigen im ersten Abschnitt, sondern fast elfmal so groß. Das kommt daher, weil in Fig. 54 die Einengung im Anfang weitaus zu langsam und hernach zu schnell erfolgt. Das Wasser stürzt also zum Schluß doch noch zu steil ab und erzeugt Wellen.

e) Berechnung der Düsenform.

Ein erstrebter linearer Abfall des Spiegelgefälles erfolgt, wenn in gleichen Längenabständen voneinander für die Druckhöhen, die Geschwindigkeiten und die Querschnitte nach der Öffnung zu die Verhältnisse bestehen:

$$h_1:h_2:h_3:h_4 \dots h_n = 1:\ 2:\ 3:\ 4 \dots n \text{ (vgl. Fig. 54)}$$

$$v_1:v_2:v_3:v_4 \dots v_n = 1:\sqrt{2}:\sqrt{3}:\sqrt{4} \dots \sqrt{n}$$

(Gl. 138) $$F_1:F_2:F_3:F_4 \dots F_n = 1:\frac{1}{\sqrt{2}}:\frac{1}{\sqrt{3}}:\frac{1}{\sqrt{4}} \dots \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Für Düsen von kreisförmigen Querschnitten, vgl. Fig. 55, ergibt sich das Verhältnis der Radien zu:

$$r_1:r_2:r_3:r_4 \dots r_n = \sqrt{F_1}:\sqrt{F_2}:\sqrt{F_3}:\sqrt{F_4} \dots \sqrt{F_n}$$

(Gl. 138a) $$r_1:r_2:r_3:r_4 \dots r_n = 1:\frac{1}{\sqrt[4]{2}}:\frac{1}{\sqrt[4]{3}}:\frac{1}{\sqrt[4]{4}} \dots \frac{1}{\sqrt[4]{n}}.$$

Bei Ableitung dieser Beziehungen ist zu beachten, daß jeweils $v = \sqrt{2gh}$ ist, also $v_1:v_2 = \sqrt{h_1}:\sqrt{h_2}$ wird, und daß ferner die Beziehungen bestehen:

$$F_1:F_2 = \frac{1}{v_1}:\frac{1}{v_2}$$

sowie

$$r_1:r_2 = \sqrt{F_1}:\sqrt{F_2}; \quad F_n = \frac{v_1}{v_n}\cdot F_1; \quad r_n = \sqrt{\frac{F_n}{F_1}}\cdot r_1.$$

Weiter folgt aus Gl. 138:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad F_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot F_1;$$

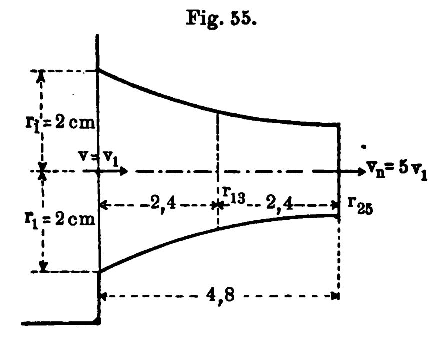
$$F_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot F_1 \quad \text{und} \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot F_1;$$

hier $F_{25} = \frac{1}{\sqrt{25}} \cdot F_1$ oder $r_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot r_1$; $r_3 = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \cdot r_1$;

(Gl. 139) $$r_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \cdot r_1;$$ siehe Gl. 138a.

Bezüglich des Wertes h_1 sei noch bemerkt, daß h_1 eine gedachte Druckhöhe ist, d. h. die Höhe, welche erforderlich sein würde, um die Geschwindigkeit v_1 erst zu erzeugen; siehe darüber nachstehend Abschnitt VII.

Fig. 55.



Beispiel. Gegeben: Die Einlaufgeschwindigkeit sei v_1 genannt. Der Radius r_1 der Einlauföffnung sei zu $r_1 = 2$ cm, die Austrittsgeschwindigkeit zu $v_n = 5 v_1$ gegeben.

Gesucht sei der Radius des Düsenquerschnittes in halber Länge und derjenige am Düsenende r_n.

Es ist: $\frac{v_1}{v_n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, mithin $\frac{\sqrt{n}}{1} = \frac{v_n}{v_1}$ und $n = \left(\frac{v_n}{v_1}\right)^2$.

Hier ist: $v_n = 5 v_1$, also $n = \left(\frac{5 v_1}{v_1}\right)^2 = \mathbf{25}$.

Teilt man die Düsenlänge in $(n - 1)$ Teile, wie oben vorausgesetzt ist, dann liegt die Mitte der Düsenlänge bei Punkt 13.

Es wird nun:

$$r_{13} = \frac{1}{\sqrt[4]{13}} \cdot r_1 = \frac{1}{1{,}9} \cdot r_1 = 0{,}526\, r_1$$

und für $r_1 = 2$ cm

$$r_{13} = 0{,}526 . 2 = \mathbf{1{,}052\,cm.}$$

Ebenso wird r_n oder hier

$$r_{25} = \frac{1}{\sqrt[4]{25}} \cdot r_1 = \frac{1}{2{,}24} \cdot r_1 = 0{,}446\, r_1$$

$$\mathbf{r_{25} = 0{,}446 \cdot 2 = 0{,}892\ cm.}$$

Ebenso lassen sich für alle Zwischenstufen in 2 zu 2 cm Abstand voneinander, d. h. für die Stufen 2, 3, 4 ... bis $(n-1)$ die Düsenradien berechnen.

Bildet der Düsenquerschnitt keine Kreisfläche, dann wird die Beziehung auszuwerten sein:

$$F_{13} = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot F_1 \quad \text{und} \quad F_{25} = \frac{1}{\sqrt{25}} \cdot F_1. \quad \text{(Vgl. Gl. 138, S. 118.)}$$

Die gestellte Bedingung fordert, daß die Düse sich anfangs schnell und gegen ihr Ende hin sehr langsam verjüngt. Wie am Beispiel des Floßwehres bei Frankfurt a. M. erörtert ist, wird bei wasserbautechnischen Anlagen das nur selten richtig berücksichtigt, meistens legt man im Vergleich zur Endöffnung den mittleren Querschnitt der Zuströmungsleitung zu groß an.

Durch die schlanke Gestalt einer Düse, zumal ihres Endteiles, wird erreicht, daß die bei Austritt der Flüssigkeit unvermeidbar eintretenden Querbewegungen, welche Verluste an axialer Geschwindigkeit bedingen, auf einen Kleinstbetrag herabgedrückt werden, so daß die verfügbare Gesamtenergie fast ganz auf Erzeugung der erstrebten Austrittsgeschwindigkeit (Richtung v_n) verwendet wird.

Die bekannte Gleichung für die Austrittsgeschwindigkeit von Gasen, für atmosphärische Luft insbesondere

$$\text{(Gl. 140)} \quad v = \sqrt{2g(T_1 - T_2) \cdot \left(\frac{c}{a} + R\right)} \quad \text{(vgl. Lieferung 2)}$$

hat auch, um Gültigkeit zu besitzen, das Vorhandensein einer vollkommen wirkenden Düse zur Voraussetzung; wo eine solche fehlt, treten Verluste an Austrittsgeschwindigkeit ein, weil ein Teil der Energie dann anderweitig, insbesondere auf Querbewegungen verbraucht wird.

Vorn unter d) ist ein Vorgang betrachtet, bei welchem starke Querbewegungen auf Kosten der Ausbildung von Längsbewegung entstehen, wie das auch bei allen Oberflächenwellen der Fall ist. Wo nebenher Querbewegungen sich bilden, die Wellen mit Querschwingung oder Querströmungen und Wirbeln erzeugen, wird

meistens die in diesen angehäufte Energie in erster Linie in Wärmebewegung verwandelt. Es sind das, vom Standpunkt der linear strömenden Bewegung der Flüssigkeit aus betrachtet, innere Bewegungen der Masse, welche der Energie ihrer äußeren strömenden Bewegung Abbruch tun und als Verlust an Energie äußerer Bewegung für diese in Rechnung zu stellen sind.

f) Die Größe der Reaktion bei vorhandener Düse.

Es wird hier gezeigt, daß die Reaktion bei vorhandener Düse sich gegenüber fehlender Düse nicht ändert.

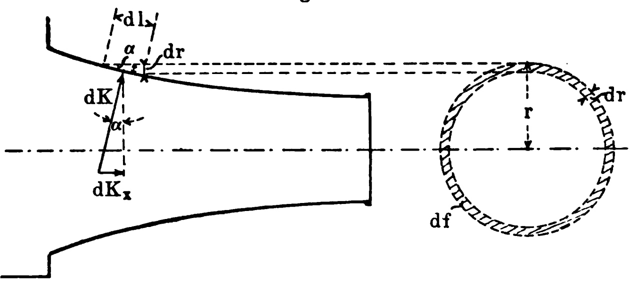
Es ist: $df = 2 r \pi . dr.$

Die Druckverminderung auf die schräge Wand ist:

$$dK = \Delta_x \sigma . 2 r \pi . dl \qquad dl = \frac{(-dr)}{\sin \alpha}$$

$$dK = \Delta_x \sigma . 2 r \pi \cdot \frac{(-dr)}{\sin \alpha}.$$

Fig. 56.



Die in Richtung des austretenden Strahles, in Richtung $A - B$ fallende Komponente von dK, genannt dK_x, wird

$$dK_x = dK . \sin \alpha$$

$$dK_x = \Delta_x \sigma . 2 r \pi \frac{(-dr)}{\sin \alpha} \cdot \sin \alpha = \Delta_x \sigma . 2 r \pi (-dr)$$

(vgl. Gl. 130, S. 113; dort r_x ist hier r genannt).

Damit ist der Fall auf das frühere Ergebnis zurückgeführt, und es wird wieder:

$$R_\beta = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{v^2}{2} \cdot f \quad \text{(Gl. 136, S. 114)}$$

sowie

$$R = R_\alpha + R_\beta = \frac{\gamma}{g} \cdot v^2 . f \quad \text{(Gl. 137),}$$

siehe auch Gl. 49a, S. 43.

3. Größe der Reaktion bei fehlender vorderer Gefäßwand im Zustande veränderlicher Form des Austrittsvorganges.

Zustand A. Ein Gefäß ist mit Flüssigkeit bis zur Höhe h gefüllt. Die Flüssigkeit, z. B das Wasser, befindet sich in Ruhe.

Zustand B. Die Wand II wird plötzlich entfernt, es fällt der Flüssigkeitsdruck gegen diese fort. Da derselbe aber gegen Wand I bestehen bleibt, ist der Rückdruck, „die Reaktion", diesem gleich; sie beträgt für das Flächenelement

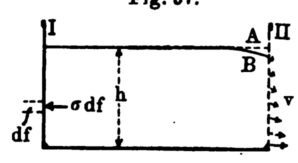
$$dR = \sigma df$$

und im ganzen

(Gl. 141) $$R = \int \sigma . df,$$

dabei σ nach der Tiefenlage von df variiert.

Fig. 57.



Bei Austritt der Flüssigkeit aus einer Gefäßöffnung, für den Beharrungszustand strömender Bewegung ermittelt, ergibt sich:

$$R = 2\sigma f \quad \text{(Gl. 50, S. 44)}$$

oder:

$$R = 2\int \sigma . df.$$

Hier, im Augenblick beginnender Bewegung, erhalten wir nur $R = \int \sigma df$, also nur den halben Betrag ersteren Wertes, da nur die der Öffnung gegenüberliegende Fläche gleicher Größe für die Entstehung der Reaktion zur Wirkung gelangt. Die Fläche der Wand II, welche in Fig. 51 (S. 112) die Öffnung umgibt und dort Unterdruck erhält, fehlt hier, mithin auch der Betrag an Reaktion, der im Abschnitt 2a mit R_β bezeichnet worden ist, so daß wir nun finden:

$$R = R_\alpha + R_\beta \quad \text{und} \quad R_\beta = 0,$$

also:

(Gl. 142) $$R = R_\alpha + 0 = R_\alpha = \int_{\sigma=0}^{\sigma=\gamma h} \sigma . df.$$

Der Umstand, daß die Reaktion hier nur die Hälfte gegenüber dem Beharrungszustande strömender Bewegung beträgt, steht auch mit dem Vorgange in Übereinstimmung, daß, wie nachstehend erörtert, die austretende Wassermenge in gleichem Verhältnis kleiner ausfällt.

Die austretende Wassermenge im Beschleunigungszustande „B“ hat im Augenblick einer Öffnung der Wand den Wert Null; sie wächst mit eintretender Beschleunigung allmählich mit zunehmendem Wert v und mißt im zeitlichen Mittel, der Zeit von $t = 0$ bis $t = t_0$, d. h. bis $v = \sqrt{2gh}$ erreicht ist,

$$v_m = \frac{0 + v}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2gh},$$

und das zwar für die verschiedenen Höhenlagen nach h variierend. Es wird das Differential der strömenden Wassermenge dq, welches am Flächenelement df der Öffnung austritt:

(Gl. 143) $$dq = v_m . df = \tfrac{1}{2}\sqrt{2gh} . df;$$

es beträgt mithin nur die Hälfte von dem, was im Beharrungszustande zum Austritt gelangt, nämlich: $dq = \sqrt{2gh} . df$.

Bemerkungen. a) In vorstehender Betrachtung ist noch unberücksichtigt gelassen, daß bei Entfernung der Wand die Wasserteilchen hinter derselben nicht nur normal zur Wand nach vorwärts beschleunigte Bewegung eingehen, sondern daß dieselben auch eine sinkende Bewegung ausführen, deren Beschleunigung oben im Wasserspiegel am größten ist (siehe Fig. 57). Es führt dies dazu, daß der Druck am Gefäßboden sich mindert und die Druckhöhe dort unter den Wert h fällt. Der Austritt erfolgt in horizontaler Richtung dann mit etwas kleinerer Geschwindigkeit als $v = \sqrt{2gh}$. Dieser Umstand wird bei Betrachtung der inneren Bewegung der Masse, insbesondere der Oberflächenwellen und auch der inneren molekularen Bewegungen von Bedeutung. Die im ganzen verfügbare, durch das Wasser der Druckhöhe „h“ aufgespeicherte potentielle Energie teilt sich hier; ein Betrag wird auf Erzeugung von Energie der Vertikalbewegung und nur der Rest auf Erzeugung von Horizontalbewegung verwendet.

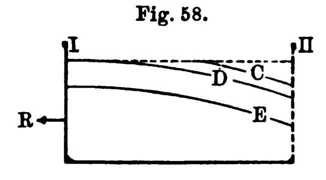
b) Nebenher sei noch bemerkt, daß gleichzeitig mit Ausgestaltung dieser Vorgänge fließender Bewegung eine Expansion der Flüssigkeit sich vollzieht, welche zur Entstehung einer Welle Veranlassung gibt, eines Wellentales, welches den Gesetzen der Schallwelle unterliegt. Das aber ist für tropfbare Flüssigkeiten von untergeordneter Bedeutung, während dieser Expansionsvorgang die Austrittsgeschwindigkeit der Gase bedeutend erhöht, wie die mechanische Wärmetheorie das lehrt und zeigt.

Zustand C. Infolge sinkender Bewegung der Spiegeloberfläche hat sich ein Wellental gebildet, welches die Wand I noch nicht erreicht hat. Die Reaktion R besitzt wie zuvor noch den Wert:

$$R = R_a = \int_{\sigma=0}^{\sigma=\gamma h} \sigma . df \quad \text{(vgl. Gl. 142, S. 122).}$$

Infolge Bildung des Wellentales durcheilen in horizontalem Sinn die austretenden Wasserteilchen nicht mehr die ganze Druckstufe h.

Fig. 58.



Zustand D bildet den Grenzzustand, bis wohin die Reaktion unverändert geblieben ist.

Zustand E zeigt in weiterer Folge den Zustand nunmehr fortgesetzt abnehmender Reaktion.

Diese und ähnliche eingehende Untersuchungen finden in Lieferung 2 ihre Fortsetzung; z. B. erfolgt das bei Ableitung der Schallgeschwindigkeit als mittlere äußere Bewegung einer nach vorn in den Raum expandierenden Luftmasse, und weiter bei Ableitung des Wesens statischer Form von Radialschwingung, welche sich dabei so verhält wie die statische Elektrizität.

VII.

Beziehung zwischen Druckhöhe und Geschwindigkeit bei unveränderlicher Beschleunigung oder Verzögerung.

1. Der Ausgangs- oder der Endzustand bildet die Ruhelage.

a) Die Beziehungen zwischen v und h.

Die Beziehungen zwischen der Höhe, welche ein Körper, sei es im freien Fall oder im Emporsteigen, vertikal oder auf geneigter Bahn durcheilt, und der Geschwindigkeit sind so mannigfaltig, daß die Anwendungen der Fallformel

$$v = \sqrt{2gh} \quad \text{(vgl. Gl. 62, S. 61)}$$

oder diejenige der Wurfhöhe

$$h = \frac{v^2}{2g} \quad \text{(vgl. Gl. 61 a)}$$

sehr vielseitiger Art sind.

Besitzt ein materielles Teilchen eine Geschwindigkeit v, dann entspricht dieser eine potentielle Druckhöhe $h = \frac{v^2}{2g}$. Unter potentieller Druckhöhe ist hier eine Druckhöhe verstanden, welche der materielle Punkt, entgegen der Schwere sich bewegend, vermöge seiner Bewegungsenergie erreichen kann, bis seine Geschwindigkeit verzehrt ist. Dabei ist allemal vorausgesetzt, daß andere Ursachen der Beschleunigung oder Verzögerung, als durch die Wirkung der Schwere gegeben, nicht vorliegen. Die hier betrachtete Beziehung ist in der bekannten, für gleichförmig verzögerte Bewegung geltenden Gleichung enthalten:

(Gl. 144) $$s = \frac{v^2}{2p},$$

worin s der in Richtung der auftretenden Verzögerung p bis zur Ruhelage zurückgelegte Weg und v die Anfangsgeschwindigkeit bedeutet (siehe Abschnitt III). Hier, wo die Verzögerung der Schwere als vorliegend vorausgesetzt ist, wird $p = g$, und weil der zurückgelegte Weg als Höhe auftritt, $s = h$; mithin ist:

(Gl. 144a) $$h = \frac{v^2}{2g}$$

Obige Gleichung gilt bekanntlich nicht nur für die vertikale Bewegung, sondern auch für Bewegungen auf geneigter Bahn.

Die Gleichung hat naturgemäß nur Gültigkeit für Verhältnisse, bei welchen g angenähert als konstant gelten kann, wie das bei Lösung von Aufgaben aus dem Ingenieurwesen der Fall ist, während bei manchen Aufgaben physikalischer Art, wo große Abstände von der Erdoberfläche in Betracht gezogen werden, die Beschleunigung g zu erheblich abnimmt, als daß obige Gleichung noch benutzt werden dürfte (vgl. Abschnitt VIII).

b) Beispiele ausgeführter Berechnungen.

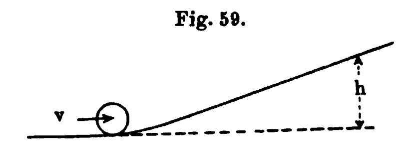
Beispiel 1. Die Höhe h ist zu bestimmen, welche eine Kugel bei einer Aufwärtsbewegung auf geneigter Bahn vermöge ihrer Anfangsgeschwindigkeit v erreicht. Es sind keine anderen Widerstände zu berücksichtigen, als die durch die Schwere gegebenen; vgl. Fig. 59.

Gegeben: $v = 10 \text{ m sek}^{-1}$. Es wird

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{10^2}{2.9{,}81} = \text{rund } \mathbf{50\ m.}$$

Beispiel 2. Es ist festzustellen, welche Wegestrecke das Wasser eines Flusses, einem See entströmend, zurückgelegt haben muß, um bei gegebenem Gefälle aus der Ruhelage heraus diejenige bekannte Geschwindigkeit zu erlangen, welche sich in dem Fluß für den Zustand gleichförmiger Bewegung nach längerem Lauf einstellt, und die hier v genannt sei. Dabei seien die Reibungswiderstände zunächst vernachlässigt.

Fig. 59.



Gegeben das Gefälle $\frac{h}{l} = \frac{1}{3000}$ und $v = 2 \text{ m sek}^{-1}$; es wird:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{2^2}{2.9{,}81} = \text{rund } 0{,}2 \text{ m},$$

daher wird bei $\frac{h}{l} = \frac{1}{3000}$:

$$l = 3000\,h = 3000.0{,}2 = \mathbf{600\ m.}$$

Da nun aber allemal die Reibung des Wassers am benetzten Umfange verzögernd auf das Wasser einwirkt, wird man in Wirklichkeit jene Geschwindigkeit $v = 2 \text{ m sek}^{-1}$ erst in etwa $l = 3.600 = 1800 \text{ m}$ Entfernung vom Ausgangspunkt der Bewegung erwarten können.

Es wäre also ganz verfehlt, z. B. in nur 400 oder 800 m Entfernung vom Anfangspunkt fließender Bewegung schon die Geschwindigkeit gleichförmiger Bewegung zu erwarten, weil das Wasser bis dahin noch nicht die erforderliche absolute Gefällhöhe h durcheilt hat, deren es bedarf, um neben einer Überwindung der Reibung noch die erforderliche Beschleunigung zu erreichen.

c) Beispiele von Unterlassung der erforderlichen Betrachtungen und Berechnungen vorstehender Art.

Beispiel 1. Obige Erwägung blieb bei Auswertung der Ergebnisse von Wassergeschwindigkeitsmessungen bisweilen unberück-

sichtigt[1]), z. B. vor Jahren am Rhein in Konstanz vorgenommen. Die Messungen hatten einen praktischen Zweck, den sie auch erfüllt haben. Nebenher ist aber bei Gelegenheit ihrer Veröffentlichung versucht worden, die für gleichförmige Wasserbewegung gültigen Formeln durch jene Meßergebnisse nachzuprüfen. Es zeigte sich ein Widerspruch, welcher zu der Vorstellung führte, daß jene Formeln nicht allgemeine Gültigkeit besäßen und verbesserungsbedürftig seien.

Das führte zur Aufstellung abgeänderter Formeln, welche aber nur verwirrend wirken, denn es lag die Meßstelle so nahe an der Ausflußstelle des Rheins aus dem Bodensee, daß an deren Ort der Zustand gleichförmiger Wasserbewegung noch nicht erreicht war und die an jene Meßergebnisse angeknüpften, zu den Gesetzen gleichförmiger Wasserbewegung in Beziehung gestellten Betrachtungen keinen Sinn gehabt haben; sie hätten unterbleiben oder zur Erkenntnis führen müssen, daß jene Wasserbewegung dort noch nicht erreicht sei und daß eine Beziehung zu den Gesetzen dieser Form der Wasserbewegung dort noch nicht vorhanden sein könne.

Beispiel 2. Professor Engels in Dresden bemühte sich, in dem Wasserbaulaboratorium der Technischen Hochschule daselbst die Reibung des Wassers am benetzten Umfange zu messen. Diese Aufgabe ist so schwierig, daß es kaum möglich sein wird, sie ohne Meßfehler zu lösen, deren Größe in wissenschaftlicher Beziehung nicht unbeachtet bleiben darf, wiewohl dieselben für die Lösung von Aufgaben praktischer Art einen Gebrauchswert besitzen können. Engels wollte aber mehr erreichen, als nur empirische Werte bieten; er verglich seine Ergebnisse mit denen der Theorie fließender Bewegung des Wassers. Dabei ergab sich ein wesentlicher Unterschied. Anstatt nun zu schlußfolgern, es müsse da an den Versuchsergebnissen etwas nicht in Ordnung sein, und anstatt dort die Ursache der Unstimmigkeit zu suchen, unterließ Engels die sorgfältige theoretische Bearbeitung des Gegenstandes; siehe darüber die technische Literatur[2]).

Der Fehler, den Engels bei seinen theoretischen Betrachtungen begangen hat, beruht darauf, daß in seiner Rechnung die

---

[1]) Baum: Strommessungen im Rhein, S. 53 u. 80. Allgem. Bauzeitung, Wien 1872.

[2]) Engels: Zeitschr. f. Bauwesen 1912, S. 473—516, und Zentralbl. d. Bauverw. 1912, S. 485—488, wie S. 678—680, und M. M. Jahrg. 1916, S. 614.

Druckhöhe h vernachlässigt ist, welche das Wasser verbraucht, wenn es auf seiner Wegstrecke an Geschwindigkeit zunimmt. Die Sohle des von Engels benutzten Versuchsgerinnes war nämlich horizontal, der Wasserspiegel aber geneigt. Das führte naturgemäß zu einer Querschnittsverminderung, also zu einer Geschwindigkeitsvermehrung gegen Ende des Gerinnes, so daß beschleunigte Wasserbewegung vorlag. Engels verlangte nun, daß die Bewegungsgesetze der Flüssigkeit, welche nur für den Zustand gleichförmiger Bewegung Gültigkeit haben, auch auf den von ihm betrachteten Fall beschleunigter, also in Wirklichkeit ungleichförmiger Bewegung anwendbar sein sollten, was eben zu dem von ihm begangenen Irrtum führte. Engels hat die tatsächlich vorliegenden Verhältnisse nicht beachtet, wie es derzeit auch Baum bei der Auswertung seiner Messungsergebnisse zu Konstanz am Rhein nicht tat.

Beispiel 3. Der Ablauf des Wassers aus einem Mühlenteich war bei verstärktem Zufluß bisher durch einen offenen Graben vermittelt. Bei Gelegenheit der Anlage eines Weges wird ein Betonrohr in starkem Gefälle am Ort des Grabens zur Ableitung des Wassers verlegt. Wie ist dieses anzuordnen, daß es die ihm zugewiesene Wassermenge aufzunehmen vermag? (Fig. 60.)

Im vorliegenden Fall war für das Rohr eine Wassergeschwindigkeit von 4 m sek^{-1} ermittelt, und das zwar auf Grund der für gleichförmige Bewegung gültigen Formel

$$v = c\sqrt{\frac{F}{U}\cdot\frac{h}{l}},$$

welche ausschließlich nur die Reibungswiderstände berücksichtigt und nur aussagt, unter welchen Umständen ein mit der Geschwindigkeit v ankommendes Wasser mit gleicher Geschwindigkeit weitergeführt wird, aber keineswegs die Bedingung enthält, welche für erstmalige Erzeugung der Geschwindigkeit in Frage kommt.

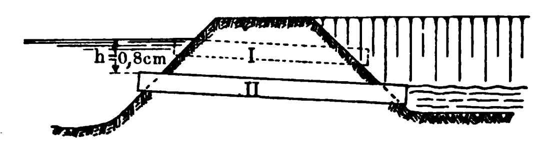
Als der Weg gebaut war, gab es Überschwemmungen. Das Rohr faßte die ihm zugewiesene Wassermenge nicht. Es gab einen Prozeß. Der Erbauer der Anlage behauptet, das Rohr müßte das Wasser abführen können, andernfalls wären die Formeln über die Wasserbewegung in Rohren unrichtig. Erst der gerichtliche Sachverständige erkennt die Ursache, daß nämlich das zu erstmaliger

Erzeugung einer Geschwindigkeit von 4 m sek⁻¹ erforderliche Druckgefälle am Rohreinlauf fehlte. Dieses mißt:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{4^2}{2 \cdot 9{,}81} = \text{rund } 0{,}8 \text{ m.}$$

Das Rohr hätte also nicht, wie geschehen, in der gestrichelt gezeichneten Lage I, sondern in der Lage II, hier Fig. 60, verlegt werden müssen, so daß sein Einlauf etwa $h = 0{,}8$ m unter dem Wasserspiegel des Teiches zu liegen kam. Bei der unrichtig ausgeführten Rohrlage I erreichte das Wasser nur geringe Geschwin-

Fig. 60.



digkeit; der Wasserspiegel senkte sich schon am Rohreinlauf unter dessen oberen Rand und fiel im weiteren Lauf des Rohres noch mehr, so daß der Querschnitt nur teilweise vom Wasserstrom erfüllt war. Aus zwiefachem Grund blieb die Wasserführung des Rohres also hinter dem irrigen Rechnungsergebnis zurück. In dem Ausdruck für die fließende Wassermenge:

$$q = v \cdot F$$

fielen beide Faktoren v und F (hier nur der vom Wasser erfüllte Teil des Rohrquerschnittes) zu klein aus, weil das Rohr zu hoch verlegt worden war.

d) Einlaufmundstücke oder Düsen zur Verminderung der erforderlichen Druckhöhe am Einlauf.

Im Anschluß an Abschnitt c) sei hier ein Mittel besprochen, um trotz ungünstig hoher Lage eines Ablaufrohres (siehe Fig. 60, Lage I) dessen ganze Füllung doch zu erreichen. Dieses besteht in der Anordnung eines Einlaufmundstückes (einer Einlaufdüse). Das Rohr beginnt mit erweitertem Mundstück M, so daß sich am Einlauf nur eine kleine Wassergeschwindigkeit v_1 einstellt, zu deren Erzeugung es nur einer kleinen Druckhöhe h_1 oder Tiefenlage des Rohres unter dem Wasserspiegel bedarf:

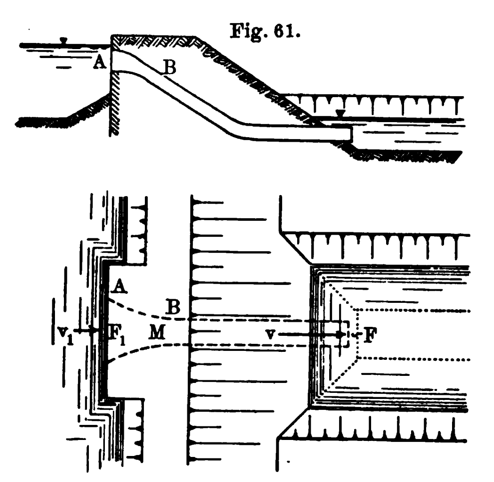
$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g} \quad \text{(vgl. Gl. 61 a, S. 61).}$$

Ist z. B. $F_1 = 4\,F$, dann wird $v_1 = \frac{1}{4}\,v$, und ist v, wie im vorstehenden Beispiel, gleich 4 m sek^{-1}, dann wird $v_1 = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$ m sek^{-1} und $h_1 = \frac{1^2}{2g} =$ nur rund 5 cm.

Der Rohrrand braucht dann nur 5 cm unter dem Wasserspiegel zu liegen.

Die größere Geschwindigkeit v, hier von 4 m, entwickelt sich im vorliegenden Fall übrigens nur dann, wenn das Rohr in seiner unteren Strecke hinreichendes Gefälle hat, hinreichend lang ist und am unteren Ende unter Wasser austritt. Es bedarf zur Erzeugung der größeren Geschwindigkeit v am Ort des verminderten Querschnittes bei B nämlich eines Unterdruckes, einer Saugewirkung, welche nur ein mit Wasser ganz angefülltes Rohr auszuüben vermag. Es fällt dabei der absolute Druck des Wassers bei B oft unter eine Atmosphäre oder der relative Druck in bezug auf den Druck im Wasserspiegel des Teiches unter Null, so daß Luft von außen in nachteiliger Weise angesogen würde, wenn die Rohrwandungen dort nicht luftdicht hergestellt wären. Es sind daher Mundstück und Rohr bis auf solche Erstreckung, wie Saugewirkung besteht, luftdicht zu machen.

Fig. 61.



Da die Bauart derartiger Rohre mit Mundstück für manche wasserbautechnische Anlagen von Bedeutung ist, brachte ich die Ableitung und Begründung ihrer Ausgestaltung für das Thema einer Doktor-Ingenieurarbeit in Vorschlag, für welche Arbeit ich auch das Referat gehabt habe. Hinsichtlich aller weiteren Einzelheiten sei auf diese Schrift, welche manche Anregungen und auch die Ergebnisse kleinerer Versuche bringt, verwiesen [1]).

---

[1]) Doktor-Dissertation von Dipl.-Ing. Winkel: „Abhängigkeit der Wasserbewegung in einer Rohrleitung von der Höhenlage und der Ausbildung des Einlaufes, d. h. des Mundstückes“. Braunschweig 1914.

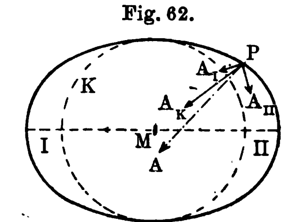
e) Einfache Ermittlung eines der beiden Teilwerte der Erdabplattung (Fig. 62 u. 63).

(Beispiel aus dem Gebiet relativer Bewegung des materiellen Punktes.)

Die Erdabplattung setzt sich aus zwei Werten zusammen, deren Summe durch Messung der Erdgestalt auf astronomisch-geodätischem Wege gefunden ist, d. h. durch Messung der Gegensätze in der Größe von Graden geographischer Breite.

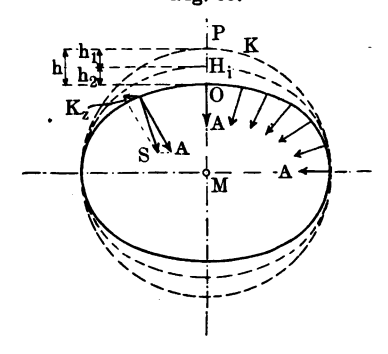
Die beiden Teilwerte entstehen wie folgt. Die Abplattung ist in erster Linie veranlaßt durch die Drehung der Erde um ihre Achse. Die also erzeugte Abplattung bedingt aber eine Anhäufung von Massen gegen den Äquator der Erde hin, hier im Schnitt in Fig. 62 als Massen I und II sich darstellend.

Fig. 62.



Ein Punkt P mittlerer geographischer Breite wird nun einmal durch die Masse der zur Erde eingeschriebenen Kugel K nach deren Mittelpunkt M angezogen; außerdem findet jedoch eine Anziehung nach I und II hin statt, und zwar nach II in stärkerem Maße als nach I, da die Masse II dem Punkte P weit näher liegt als die Masse I und die Massenanziehungen im umgekehrten Verhältnis der Quadrate ihrer Entfernungen vom Punkte P stehen. Die Resultierende A der drei Kräfte A_k, A_I und A_{II} verläuft, wie ersichtlich, nun nicht durch den Erdmittelpunkt M, sie wird vielmehr von M ab und nach der Masse II hingelenkt.

Fig. 63.



In Fig. 63 ist K die zur Erde umschriebene Kugeloberfläche, H_i die ideelle Horizontalfläche, bezogen auf die Anziehungskräfte A, für sich allein genommen ohne Mitwirkung der Zentrifugalkraft, d. h. die Normalfläche zu den Richtungen A, eine Fläche, die am Äquator beginnt und alle A-Richtungen normal schneidet.

O ist die wahre Erdoberfläche, deren Gestalt unter Mitwirkung der Zentrifugalkraft K_z entsteht. Die Resultierende von A und K_z ist die Schwerkraft S, zu welcher die Erdoberfläche überall normal verläuft. Da nun S gegenüber A eine nach außen gekehrte Richtung besitzt, nimmt die Normalfläche zu S, d. h. die Erdoberfläche O oder die wahre Horizontalfläche eine gegenüber H_i stärker abgeplattete Gestalt an.

Es gilt nun den Teilbetrag h_2 der Erdabplattung zu bestimmen, um deren Betrag ein auf der Erdoberfläche vom Äquator zum Pol sich bewegender Körper in Richtung der Anziehungskräfte A einen Weg zurücklegt, d. h. um welchen Betrag er in Richtung A also fällt.

Die Lösung dieser Aufgabe ergibt sich sehr einfach bei Betrachtung der absoluten Bewegung eines materiellen Punktes, welcher vom Äquator, von der absoluten Geschwindigkeit 0 ausgehend, zum Pol hinabgleitet. Für einen Körper, welcher an der Drehung der Erde um ihre Achse nicht teilnimmt, erscheint ja die wahre Erdoberfläche so, wie wenn sie um h_2, den in Fig. 63 angedeuteten Teilbetrag der ganzen Erdabplattung, gegen die Pole hin tiefer läge, ein Tal bildend. Hingegen ist H_i für jenen Körper eine Horizontalfläche, da sie alle Anziehungsrichtungen A normal schneidet. Bei Bewegung eines Teilchens auf der Erdoberfläche senkt sich dasselbe unter H_i, es legt in Richtung A einen Weg zurück, welcher bis zum Pol den Betrag h_2 erreicht. Es fällt also das Teilchen gleichsam in Richtung A um diesen Höhenwert, wenn es, vom Äquator mit der absoluten Geschwindigkeit „Null" ausgehend, längs der Linie des ruhenden, sich mit der Erde nicht drehenden Achsenkreuzes polwärts abgleitet. Dabei besteht wieder die Gleichung:

(Gl. 145) $$h_2 = \frac{u^2}{2\,g_a}.$$

Darin bedeutet u die absolute Endgeschwindigkeit, mit welcher das Teilchen den Pol erreicht. Es beschreibt im System absoluter Bewegung zum Pol hin eine geradlinige Bahn, im System relativer Bewegung, d. h. auf der Erdoberfläche, hingegen als Weg eine vielgewundene Spirale.

Die Größe des Endwertes u findet sich nun wie folgt. Ein Punkt, welcher am Äquator die absolute Geschwindigkeit $u = 0$ besitzt, weist zur kreisenden Erdoberfläche die relative Geschwin-

digkeit $v = 463{,}7\ \mathrm{m\,sek^{-1}}$ auf, und zwar von Ost nach West gerichtet, wie das auch dem scheinbaren Lauf der Fixsterne entspricht. Bei reibungsloser Bewegung auf der horizontalen Erdoberfläche ändert der Körper nun seine relative Geschwindigkeit nicht; er trifft also am Pol mit der relativen Geschwindigkeit $v = 463{,}7\ \mathrm{m\,sek^{-1}}$ ein, welches dort zugleich auch die absolute Geschwindigkeit u ist, da der Pol keine lineare Geschwindigkeit in bezug auf die Erdachse besitzt. Hier wird also $u = v$, mithin $u = 463{,}7\ \mathrm{m\,sek^{-1}}$; das in Gl. 145 eingesetzt, ergibt als gesuchten Teilwert der Erdabplattung:

$$h_2 = \frac{(463{,}7\ \mathrm{m\,sek^{-1}})^2}{2\,g_a}.$$

In obiger Gleichung bedeutet nun g_a nicht die Beschleunigung der Schwere, sondern diejenige der Anziehungskräfte A, welche gegen den Äquator hin etwas größer als g ausfällt, da für g_a die Wirkung der Zentrifugalkraft in Abzug gerät. Es ist für den Äquator:

(Gl. 146) $$g_{a_1} = g + \frac{v^2}{r} = g + \frac{463{,}7^2}{6\,377\,397} = 9{,}781 + 0{,}034 = 9{,}815$$

am Pol:

(Gl. 147) $$g_{a_2} \ldots\ldots\ldots\ldots = 9{,}831 + 0{,}0 = 9{,}831$$

zusammen $= 19{,}646$

Der Mittelwert g_a beträgt:

(Gl. 148) $$g_a = \frac{g_{a_1} + g_{a_2}}{2} = \frac{19{,}646}{2} = 9{,}823$$

$$h_2 = \frac{463{,}7^2}{2 \,.\, 9{,}823} = \mathbf{10\,945\ m} \quad \text{(vgl. Gl. 145).}$$

Die ganze Erdabplattung ist durch Gradmessungen bestimmt

zu: $h_1 + h_2 = 6\,377\,397 - 6\,356\,079 = 21\,318$ m
$h_2 \ldots\ldots\ldots\ldots = 10\,945$ „

verbleibt: $h_1 \ldots\ldots\ldots\ldots =$ **10 373 m**

Hier ergeben sich die beiden Teilwerte h_1 und h_2 bis auf etwa 5 v. H. einander gleich. Man kann die Frage aufwerfen, ob bei homogener Dichte der Erdmasse die Werte h_1 und h_2 einander genau gleich werden müßten.

Für Zwischenpunkte ergeben sich die Werte der Abplattung in ähnlicher Weise; man gibt dann dem materiellen Punkt auf der betreffenden, mit dem Pol in Beziehung zu setzenden geographischen Breite φ wiederum die relative Anfangsgeschwindigkeit Null.

Für $\varphi = 60^0$ wird, weil $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ ist, der Radius des Breitenkreises angenähert $\frac{1}{2} r$, was wegen der Erdabplattung indes nicht ganz genau stimmt, und daher v_1 nur angenähert:

$$u_1 = v_1 = \tfrac{1}{2}\, 463{,}7 = 231{,}8 \,\mathrm{m\,sek^{-1}};$$

mithin:
$$h_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{463{,}7^2}{2 g_a} = \text{rund } \frac{10945}{4} \text{ m.}$$

Es senkt sich also die Erdoberfläche O vom 60. Breitenkreis zum Pol unter die ideelle Horizontalfläche H_i etwa um $^1/_4$ des ganzen zwischen Äquator und Pol ermittelten Betrages.

2. Die potentielle Höhe als Zusatzhöhe.

Ein Körper besitze am Orte B die Fallgeschwindigkeit v_1 in vertikaler Richtung; er fällt um ein weiteres Stück h. Die Endgeschwindigkeit v_2 am Orte C ist zu bestimmen.

Fig. 64.

Würde der Körper aus der Ruhelage und aus solcher Höhe $k = AB$ herabgefallen sein, daß er bei B die Geschwindigkeit v_1 erreicht hätte, dann würde die Gleichung bestehen:

(Gl. 149) $$v_1 = \sqrt{2 g k}$$

und

(Gl. 149 a) $$k = \frac{v_1^2}{2 g}.$$

Die also gedachte Druckhöhe k ist die Zusatzdruckhöhe, deren Mitbenutzung man bei allen Berechnungen bedarf, woselbst man nach der Fallformel eine Endgeschwindigkeit bei vorhandener Anfangsgeschwindigkeit berechnen will.

Der Körper verhält sich im weiteren Fallvorgange dann so, als wäre er aus der Höhe $h + k$ herabgefallen, und man findet:

(Gl. 150) $$v_2 = \sqrt{2 g (k + h)}.$$

Man kann auch schreiben:

Fig. 65.

(Gl. 150a) $$\frac{v_2^2}{2g} = k + h = \frac{v_1^2}{2g} + h$$

und

(Gl. 151) $$h = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \quad \text{(Fig. 64)}$$

bei beschleunigt fallender Bewegung, und

(Gl. 152) $$h = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g}$$

bei verzögert steigender Bewegung (siehe Fig. 65), wenn man hier den unteren Wert v_1 nennt, weil dieser nun Anfangswert ist und den oberen jetzt v_2 bezeichnet.

Beispiel a. In einem Bach treibt das Wasser mit einer Geschwindigkeit v_1 einem Wehre zu; es ist die Geschwindigkeit v_2 zu ermitteln, mit welcher das Wasser über der Wehrkrone in h m Tiefe unter dem Oberwasserspiegel austritt. Reibungswiderstände seien vernachlässigt. Es wird die Zusatzdruckhöhe

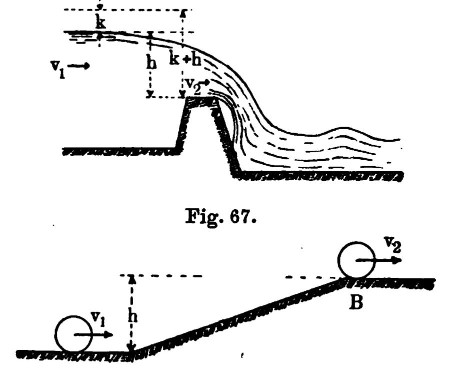


Fig. 66.

Fig. 67.

$$k = \frac{v_1^2}{2g}$$

und

(Gl. 153) $$v_2 = \sqrt{2g(h + k)}$$

(vgl. Gl. 150).

Beispiel b. Gegeben: Eine ohne Rollwiderstand mit einer Geschwindigkeit v_1 sich bewegende Kugel trifft bei A auf eine schiefe Ebene, bewegt sich an ihr empor und erreicht den Punkt B, um die Höhe h höher als A belegen

Gesucht: Die Endgeschwindigkeit v_2.

Hier, wo eine Hebung statthat, findet ein Verbrauch von ursprünglich vorhandener potentieller Druckhöhe k um den Betrag h statt. Es wird:

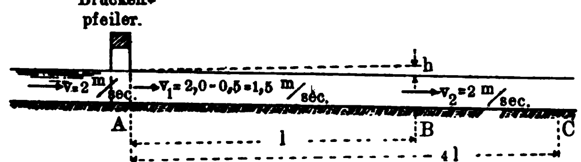
(Gl. 154) $$v_2 = \sqrt{2g(k - h)} = \sqrt{2g\left(\frac{v_1^2}{2g} - h\right)}.$$

Es sei $v_1 = 20$ m sek^{-1} und $h = 10$ m; es wird

$$v_2 = \sqrt{2 \,.\, 9{,}81 \left(\frac{20^2}{2 \,.\, 9{,}81} - 10\right)} = \text{rund } 14{,}3 \text{ m sek}^{-1}.$$

Beispiel c. An einem Fluß vom Gefälle 1:3000 betrage die Wassergeschwindigkeit im normalen Lauf (d. h. im Zustande gleichförmiger Bewegung) $v = 2$ m sek^{-1}. Am Ort einer Überbrückung ist die Wasserbewegung durch die Brückenpfeiler um

Fig. 68.



0,5 m gemindert. Wie weit stromabwärts wird sich die ursprüngliche Geschwindigkeit wieder eingestellt haben, wenn das Wasser sich bis dorthin reibungslos bewegt? (Vgl. Fig. 68.)

$$h = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \quad \text{(vgl. Gl. 151, S. 135)}$$

$$= \frac{2{,}0^2 - 1{,}5^2}{2 \,.\, 9{,}81} = 0{,}09 \text{ m}.$$

Gegeben $\frac{h}{l} = \frac{1}{3000}$; $l = 3000\,h = 3000 \,.\, 0{,}09 = 270$ m.

Beachtet man den Umstand, daß keineswegs das ganze absolute Gefälle h zur Erteilung von Beschleunigung zur Verfügung steht, sondern im Anfang kaum die Hälfte und zum Schluß nichts, weil dann zwischen Gefällwirkung und treibender Kraft der Gleichgewichtszustand wieder erreicht ist, dann findet sich, daß in Wirklichkeit im Mittel kaum $^1/_4$ des absoluten Gefälles auf Beschleunigung wirkt, der Rest auf Überwindung der Reibung. Die Entfernung, bis zu welcher die Störung der Wasserbewegung gegenüber der normalen wirkt, reicht daher noch weiter flußabwärts als B, nämlich bis C, und es wird AC etwa gleich $4\,l$.

$$AC = 4 \,.\, 270 = \text{rund } \mathbf{1100\ m}.$$

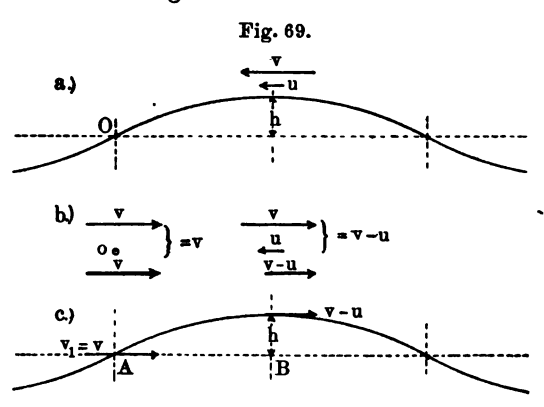
d) Beispiele für den Fall relativer Bewegung; die Wasserwelle.

Höhe des Scheitels einer sehr langgestreckten, fortschreitenden Wasserwelle bei Vernachlässigung des geringen Einflusses der vertikalen Bewegung ihrer Elemente.

Gegeben v die Geschwindigkeit fortschreitender Bewegung der Welle und u die Schwingungsgeschwindigkeit ihrer Elemente im Scheitel des Wellenberges.

Um die zwischen der Druckhöhe und den Geschwindigkeitsänderungen des Wasserelements bestehende Gleichung anwenden zu können, sind die Geschwindigkeiten auf einen Punkt der schiefen Ebene zu beziehen. Es gilt, diesen Fall wieder auf das Beispiel 16, S. 62 und Fig. 23 zurückzuführen, in welchem das Bild der schiefen Ebene in der Tafelebene ruht. Das wird in Fig. 69 erreicht, indem zu dem fortschreitenden Bilde der Welle (siehe a) eine Geschwindigkeit von der Größe v, aber von entgegengesetzter Richtung, addiert wird (siehe b). Dann entstehen, da $v - v = 0$ ist, in bezug auf jene in der Bildebene jetzt ruhende Welle die in Fig. 69c dargestellten relativen Geschwindigkeiten des Wasserelements; es tritt nun bei A mit der relativen Geschwindigkeit v in die Welle ein, verliert auf dem Wege bis B an Geschwindigkeit den Betrag u und behält nur noch an relativer Geschwindigkeit $(v - u)$.

Fig. 69.



Nach Gl. 152, S. 135 wird nun:

$$h = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = \frac{v^2 - (v - u)^2}{2g} = \frac{v^2 - (v^2 - 2uv + u^2)}{2g}$$

$$h = \frac{2uv - u^2}{2g},$$

und für sehr kleine Werte u gegenüber v, $u^2 = 0$ gesetzt, angenähert:

$$h = \frac{2uv}{2g}.$$

(Gl. 155) $$h = \frac{uv}{g}$$ für Wellenberge[1]) und

(Gl. 155a) $$h = \frac{v(-u)}{g}$$ für Wellentäler.

Beispiel α. Liegt ein Wellental vor, senkt sich die Wasseroberfläche von A nach B, dann findet eine relative Geschwindigkeitszunahme auf $v + u$ statt, und es wird:

$$h = \frac{v^2 - (v^2 + 2vu + u^2)}{2g}$$

$$h = \frac{-2vu - u^2}{2g} = -\frac{2vu + u^2}{2g}$$

oder (bei u sehr klein) rund:

$$h = -\frac{vu}{g}.$$

Gegeben: $v = 10 \text{ m sek}^{-1}$; $u = 1{,}0 \text{ m sek}^{-1}$.

$$h = -\frac{2vu + u^2}{2g} = -\frac{2.10.1{,}0 + 1{,}0^2}{2g} = -\frac{20 + 1{,}0}{2.9{,}81} = -\mathbf{1{,}0\,m}.$$

Man ersieht hieraus, daß für Werte v weit größer als u die Bedeutung des zweiten Gliedes „u^2" gegenüber „$2vu$" zurücktritt.

Beispiel β. Die Höhe der Flutwelle im freien Ozean. Bei Drehung der Erde um ihre Achse im Sinne von A nach B gewinnen die Wasserelemente durch die Flut und Ebbe erzeugende Kraft K des Mondes für die Strecke, auf welcher ihre Wirkung im gleichen Sinne erfolgt, hier vom Orte des Mondaufganges A bis B, dem Ort der Höchststellung des Mondes am Himmel, eine Geschwindigkeit u (Fig. 70).

In äquatorialer Gegend mißt u in runder Zahl angenähert $u = 1 \text{ cm sek}^{-1} = 0{,}01 \text{ m sek}^{-1}$, wie sich durch Integration des Wertes $u = \int_{t=0}^{t=t} dt \cdot \frac{du}{dt}$ finden läßt.

---

[1]) Siehe auch Gl. 66, S. 63, dort für u aber v und für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle dort w anstatt hier v geschrieben, und ferner die Fußnote S. 63.

Es ist darin $\frac{du}{dt}$ eine horizontale Beschleunigung von veränderlichem Wert, der sich nach der Theorie der Flut- und Ebbeerscheinungen aus dem Zusammenwirken der Anziehungskraft des Mondes (wie auch der Sonne) und der Zentrifugalkraft der Erde in ihrer Revolutionsbahn um das betreffende Gestirn bestimmt.

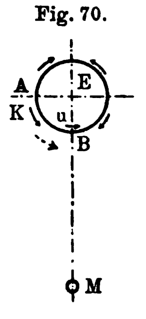


Fig. 70.

Bestände nun am Äquator eine so große Tiefe des Ozeans, daß sich dort unter dem Zenitpunkt B des Gestirns (hier des Mondes) eine in bezug auf den Mond und auf B in relativer Ruhe verharrende Welle bilden könnte, dann ermittelte sich für sie ihr Höchstwert nach Art von Beispiel α, S. 138. Obige Bedingung ist erreicht, wenn die Wellengeschwindigkeit v, von Ost nach West gerichtet, gleich wird der relativen linearen Geschwindigkeit eines Punktes der Erdoberfläche in bezug auf B.

Dabei ist zu beachten, daß der Punkt B, wenn er an keiner Drehung um die Erde teilnähme, in bezug auf die Punkte der Erdoberfläche eine relative Geschwindigkeit, nämlich diejenige der Erdrotation besäße, also 463,7 m sek^{-1}. Da aber der Mond in gleichem Sinn wie die Erde um diese in etwa je einem Monat kreist, besitzt Punkt B im Mittel etwa 16,8 m sek^{-1} Geschwindigkeit nach Ost, so daß ein Punkt der Erdoberfläche den Punkt B mit der Geschwindigkeit $v_1 = 463{,}7 - 16{,}8 = 446{,}9$ m sek^{-1} überholt. Es tritt also in A (Fig. 70) das Wasserteilchen mit der Geschwindigkeit 446,9 m sek^{-1}, in bezug auf B genommen, in die Flutwelle ein, um bei B eine um 0,01 m größere Geschwindigkeit zu erreichen. Daher wird, wenn die gemachten Voraussetzungen erfüllt sind, da Beschleunigung vorliegt, hier:

$$h = -\frac{vu}{g} = -\frac{447 \,.\, 0{,}01}{9{,}81} = -\mathbf{0{,}46\,m} \quad \text{(vgl. Gl. 155a, S. 138).}$$

Dies wäre der ganze Höhenunterschied der also entstandenen Flutwelle vom Scheitel des Wellenberges bis zum Scheitel des Tales gemessen. Wohlgemerkt entsteht dabei unter dem Zenit des die Welle erzeugenden Gestirns ein Wellental, nicht etwa ein Wellenberg, wie die meisten mehr populär gehaltenen Darlegungen des Flut- und Ebbeproblems das angeben und es auch in den

Schulen meist gelehrt wird. Eine Schwellung, ein Wellenberg, bildete sich unter dem Zenitpunkt des Gestirns allerdings, wenn die Erde sich nicht um ihre Achse drehen würde. Wir hätten alsdann aber in einem Monat nur zweimal Flut und zweimal Ebbe soweit der Mond, und das nur zweimal im Jahr soweit die Sonne in Frage kommt. Im übrigen ist der Vorgang der Erzeugung der Gezeiten von weitaus verwickelterer Art, als hier nur andeutungsweise dargelegt ist, das zeigt auch eine noch unfertige Abhandlung von mir, welche das Problem der Flut- und Ebbebewegung für die atmosphärische Luft zu behandeln sich bemüht. Die alte Auffassung, nach welcher unter dem Zenitpunkt ein Wellenberg entsteht, nennt man die statische, die neuere die dynamische Fluttheorie.

Auf dem Monde bildete sich die Flut statischer Form aus, da jener in bezug auf den Radiusvektor Erde–Mond keine Winkelgeschwindigkeit eigener Drehung besitzt; vgl. Fig. 41, S. 100.

3. Annäherungswerte potentieller Höhen, und zwar unter Voraussetzung eines konstanten, hier auf $g = 10\,\mathrm{m\,sek^{-2}}$ abgerundeten Wertes der Schwere.

Häufig kommt es, um Anschauung zu gewinnen, nicht darauf an, eine genaue Berechnung zu machen; diese kann später erfolgen, wofern man ihrer bedarf. Es gilt oft, schnell zu einem Ergebnis zu gelangen, und dann genügt es, mit abgerundeten Werten zu rechnen, hier z. B. mit $g = 10\,\mathrm{m\,sek^{-2}}$, anstatt mit im Mittel $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,sek^{-2}}$, was die genaueren, hier in Klammern gesetzten und vergleichsweise noch angeführten Werte ergibt.

Geschwindigkeiten v in $\mathrm{m\,sek^{-1}}$	Zugehörende potentielle Druckhöhen (Annäherungswert $h = \frac{v^2}{2.10}$)	Geschwindigkeiten v in $\mathrm{m\,sek^{-1}}$	Zugehörende potentielle Druckhöhen (Annäherungswert $h = \frac{v^2}{2.10}$)
1	5 cm (genau 5,097 cm)	9	$9^2.5$ cm = 4,05 m
2	$2^2.5 = 20$ cm	10	5,00 „
3	$3^2.5 = 45$ „		(genau 5,097 „)
4	80 „	100	500 „
5	1,25 m	500	12,5 km
6	1,80 „	700	24,5 „
7	2,45 „	1 000	50 „
8	3,20 „	10 000	5000 „

Beispiel der Anwendung. 1. Ein aus einem Gefäß ohne Ausbildung eines Mundstückes austretendes Rohr soll mit $v = 3\,\mathrm{m\,sek}^{-1}$ Geschwindigkeit Wasser abführen. Wie tief unter dem Wasserspiegel hat dasselbe zu beginnen, damit diese am Einlauf erstrebte Geschwindigkeit sich einzustellen vermag? Die Antwort lautet: Oberkante Rohr muß $h = 45$ cm unter dem Wasserspiegel des Gefäßes liegen, wofern kein besonderes Mundstück angebracht ist (vgl. Fig. 61, S. 130).

2. Es gilt die Wassergeschwindigkeit in einem Gerinne von 3 auf $4\,\mathrm{m\,sek}^{-1}$ (bei fehlender Reibung) zu vermehren. Wie groß ist das für diese Geschwindigkeitssteigerung benötigte absolute Gefälle? Es ergibt sich: $h = 80 - 45 = 35$ cm, zu der schon vorhandenen potentiellen Druckhöhe muß eine Druckstufe von 35 cm noch hinzutreten.

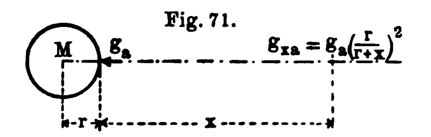
Die großen Zahlenwerte der Zusammenstellung zeigen, wie es kommt, daß sich die Moleküle von Gasen, in erheblichen Zwischenräumen zueinander, im Raume gleichsam schwebend erhalten können. Sie vermögen das infolge ihrer großen Geschwindigkeit, welche dem Wesen nach zusammenfällt mit der äußeren Form ihrer Wärmebewegung. Auch die Höhe der Atmosphäre steht damit in gewisser Beziehung, wiewohl für diese noch anderes hinzutritt, wie z. B. eine Vermehrung der Wärmebewegung mittlerer Schichten durch Kondensation der Feuchtigkeit (Wolkenbildung) sowie sehr hoher Schichten der Luft durch Einstrahlung von Sonnenwärme. Von besonderer Bedeutung sind diese Betrachtungen auch für das Verständnis der Ursache, welche bewirkt, daß die Licht- und Wärmestrahlen sowie die elektrischen Wellen im Weltenraum überall gleiche Geschwindigkeit besitzen. Der innere Bewegungszustand des Äthers bietet Geschwindigkeiten von Hunderten Millionen Meter, so daß darin Energiemengen angehäuft sind, denen gegenüber die Arbeitswerte der Massenanziehung der Gestirne wie etwas fast Wesenloses verschwinden und allenfalls nur in unmittelbarer Nähe großer Gestirne durch Ablenkung der Strahlen in Erscheinung zu treten vermögen.

VIII.

Beziehungen zwischen Druckhöhen und Geschwindigkeiten bei veränderlicher Beschleunigung oder Verzögerung.

Aufgabe 1. Es ist die Geschwindigkeit v zu ermitteln, mit welcher ein aus der Unendlichkeit des Raumes fallender Körper, mit der Geschwindigkeit 0 beginnend, die Erdoberfläche erreicht (Fig. 71, lese darin g_{ax}).

Fig. 71.



Beträgt die Beschleunigung der Erdanziehung an deren Oberfläche g_a, dann mißt dieselbe im Abstande x:

(Gl. 156) $$g_{ax} = g_a\left(\frac{r}{r+x}\right)^2$$ (siehe Gl. S. 96),

und die Anziehungskraft für ein Massenteilchen m mithin:

$$K = m.p, \text{ hier } p = g_{ax} \text{ gesetzt, } K = m.g_a\left(\frac{r}{r+x}\right)^2.$$

Das Differential der Arbeit dieser Kraft auf dem Wege $ds = -dx$ ermittelt sich zu:

$$dA = mg_a\left(\frac{r}{r+x}\right)^2\cdot(-dx)$$

und daher

$$A = mg_a r^2 \int_{x=\infty}^{x=0} \frac{-dx}{(r+x)^2}.$$

Es ist nun:

$$\int_{x=\infty}^{x=0} \frac{dx}{(r+x)^2} = \int_{x=\infty}^{x=0} \frac{d(r+x)}{(r+x)^2} = -\left(\frac{1}{r+x}\right)$$

$$A = mg_a r^2 \Big|_{x=\infty}^{x=0} \frac{1}{r+x} = mg_a r^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+\infty}\right) = mg_a r^2\left(\frac{1}{r} - 0\right)$$

(Gl. 157) $$A = mg_a r.$$

Man nennt diesen Arbeitswert das **Ergal** der Massenanziehung der Erde. Die Bezeichnung ist vom griechischen Worte ergon

(Arbeit) abgeleitet, desgleichen ist das auch die Bezeichnung „das Erg“, die Arbeitseinheit des sogenannten absoluten Maß- und Gewichtssystemes.

Die Energie $E = \frac{m v^2}{2}$, mit welcher der aus dem Unendlichen bis zur Erdoberfläche herabfallende Körper die Erdoberfläche trifft, verdankt er obiger Arbeitsleistung A, es wird also

(Gl. 158) $$\frac{m v^2}{2} = A = m g_a r$$

und

(Gl. 159) $$v = \sqrt{2 g_a r}.$$

Die Endgeschwindigkeit ist also so groß, wie wenn der Körper bei unveränderlichem g_a aus der Höhe $h = r$ herabfiele.

Für Orte am Äquator ist S. 133 ermittelt:

$$g_a = g_{a_1} = 9{,}815 \text{ m sek}^{-2}.$$

Hier ist $r = 6\,377\,397$ m. Mithin wird

$$v = \sqrt{2 . 9{,}815 . 6\,377\,397} = \mathbf{11\,190 \text{ m sek}^{-1}}.$$

Ein Körper, mit solcher Geschwindigkeit von der Erdoberfläche emporgeworfen, würde auf die Erde nicht wieder zurückkehren; er wäre zu einem gesondert von der Erde sich bewegenden Himmelskörper geworden; er bliebe dabei aber noch im Bannkreis der Sonne.

Vermöchte ein Luftmolekül seinen ganzen Wärmeenergieinhalt auszuwerten, um das Ergal der Erdanziehung zu überwinden, dann müßte es, um das zu erreichen, eine Temperatur etwa gleich dem $\left(\frac{11\,190}{618}\right)^2 = 328$ fachen der absoluten Temperatur von 273 besitzen, da die bei solcher Temperatur jenem innewohnende Energie im ganzen etwa so groß ist, wie wenn das Molekül 618 m sek^{-1} an Geschwindigkeit äußerer Bewegung besäße. Es entspräche obiges einer absoluten Temperatur von 89544 Grad. Bei einer Lufttemperatur von etwa so hohem Betrage würde die Luft sich auf der Erde nicht halten, sondern sich entgegen der Anziehungskraft von der Erde in den freien Weltenraum hinaus verflüchtigen, expandieren.

Aufgabe 2. Es ist die Geschwindigkeit zu ermitteln, deren ein materieller Punkt bedarf, um frei schwebend die Erde im Abstande des Erdradius zu umkreisen. Die

Anziehungsbeschleunigung $g_{a_1} = 9{,}815$ m sek^{-2} (siehe S. 133) und die Zentripetalbeschleunigung $p = \frac{v_1^2}{r}$ müssen alsdann einander gleich ausfallen. Es wird:

(Gl. 160) $$g_{a_1} = \frac{v_1^2}{r}$$

und

(Gl. 161) $$v_1 = \sqrt{g_{a_1} . r}.$$

Gegenüber dem Werte v (Gl. 159) der Aufgabe 1 wird v_1 hier kleiner, nämlich $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} v$. Es ergibt sich, wenn man den Wert für v (siehe S. 143) einsetzt:

$$v_1 = \frac{11190}{\sqrt{2}} = 7912{,}6 \text{ m}.$$

Zu diesem Ergebnis gelangt man auch bei Betrachtung der Arbeit, welche die Erdanziehung in einer Raumrichtung, in Fig. 72 z. B. in Richtung der Y-Achse leistet. Bei der kreisenden Bewegung von B nach C, die sich mit der Geschwindigkeit v vollzieht, besitzt der materielle Punkt bei B in Richtung der Y-Achse die Geschwindigkeit $v_y = 0$ und bei C diejenige $v_y = v_1$.

Fig. 72.

Die Arbeitsleistung A_y der Komponente der Erdanziehung $m g_{ay}$ in Richtung der Y-Achse mißt:

$$A_y = \int m g_{a\,y} . dy.$$

Hierin ist: $g_{a\,y} = g_a \cos \alpha$ (Fig. 72a; lese dort α anstatt x).
und $dy = r\, d\alpha \sin \alpha$ (Fig. 72b).

Mithin: $A_y = \int m g_a \cos \alpha\, r \sin \alpha\, d\alpha = m g_a r \int \sin \alpha\, d(\sin \alpha)$.

(Gl. 162) $$A_y = -m g_a r \left| \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right|_{\alpha = 90}^{\alpha = 0} = -m g_a . r \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2} m g_a . r.$$

Dies ist der halbe Betrag des Wertes von Gl. 158, was nachzuweisen war.

Mit der Geschwindigkeit der Erdumdrehung am Äquator verglichen, ergibt sich:

$$u = \frac{v_1}{463{,}7} = \frac{7912{,}6}{463{,}7} = 17{,}1.$$

Die Erdanziehung würde am Äquator also aufgehoben sein und die Schwere dort Null werden, wenn die Erdrotation 17,1 fach größer wäre, als sie in Wirklichkeit ist.

Aufgabe 3. Es ist die Arbeit der Anziehungskräfte des Wassers in bezug auf kondensierenden Wasserdampf zu bestimmen.

Gegeben sind Dampf und Wasser von 100° C bei 1 Atm. Spannung (10 333 kg m^{-2}).

Bei der Kondensation des Dampfes wirkt der äußere Druck der übrigen Dampfmoleküle oder derjenige anderer Gase auf das kondensierende Molekül in gleichem Sinne, wie die molekularen Anziehungskräfte des Wassers auf das Dampfmolekül. Die Arbeit beider erhöht die Energie des Moleküls, und diese muß abgeleitet werden, wenn der Kondensationsvorgang sich vollziehen soll.

Die äußere Arbeit des Dampfes berechnet sich dabei wie folgt. Ein Kilogramm jenes Dampfes nimmt etwa 1,7 cbm Raum ein, nach der Kondensation das daraus entstehende Wasser aber nur $^1/_{1000}$ cbm, welch letzterer Wert hier als sehr klein vernachlässigt sei. Die Arbeit A_a des Dampfdruckes berechnet sich mithin für 1 kg kondensierenden Dampfes zu

$$A_a = 1{,}7\,\text{m}^3 . 10\,333\,\text{kg} . \text{m}^{-2} = 17\,566\,\text{mkg}.$$

Nun zeigt das Experiment, daß bei der Kondensation unter diesen Verhältnissen eine Wärmemenge von 536,5 Kalorien frei wird, die durch Kühlung abgeleitet werden muß, um den Vorgang der Kondensation durchführen zu können. Das entspricht, da eine Kalorie 424 mkg Energie besitzt, einer Energie von

$E = 424 . 536{,}5$ . . . . $= 227\,476$ mkg

Davon rühren von der Arbeit der Dampfspannung her . . . . $A_a = 17\,566$ „

Der Rest ist durch die Arbeit A_m der molekularen Anziehung bewirkt . . . . . $A_m = 209\,910$ mkg

Es ist dieser Betrag nicht der Meistbetrag der molekularen Anziehungsarbeit, nicht das Ergal der Kraft, da die Anziehung